

中国科学院研究生院教材
Textbooks of Graduate University of Chinese Academy of Sciences

估值原理

——理论及其应用

程 兵 编著

Valuation Principle:
Theory and Application



高等教育出版社
Higher Education Press



中国科学院研究生院教材

Textbooks of Graduate University of Chinese Academy of Sciences



ISBN 978-7-04-020684-5

9 787040 206845 >

定价 46.00 元

学科类别：金融学



估值原理

——理论及其应用

程 兵 编著

Valuation Principle:

Theory and Application



内容提要

本书首先讨论估值的经济学原理，其次讨论估值的金融学原理，最后讨论单个金融工具的估值原理和方法。本书的写作特点是理论与实际的金融案例相结合，基于理论结果对具体估值方法提供指导，反过来通过具体的估值例子来帮助读者理解理论中的难点。

本书的读者对象是学术研究者、研究生、上市公司分析师、投资策略师以及基金、信托、投资银行等金融行业的投资经理和研究人员。

图书在版编目（CIP）数据

估值原理——理论及其应用 / 程兵编著. —北京:高等教育出版社, 2007.4

ISBN 978-7-04-020684-5

I.估... II.程... III.资产评估-教材 IV.F20

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 019755 号

策划编辑 沈 俐 **责任编辑** 李华英 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 朱 静
版式设计 张 岚 **责任校对** 金 辉 **责任印制** 尤 静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　址**	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	化学工业出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　本	787×1092 1/16	**版　次**	2007 年 4 月第 1 版
印　张	16.25	**印　次**	2007 年 4 月第 1 次印刷
字　数	300 000	**定　价**	46.00 元

物料号 20684-00


PDG

总 序

在中国科学院研究生院和高等教育出版社的共同努力下，凝聚着中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血和汗水的中国科学院研究生院教材面世了。这套教材的出版,将对丰富我院研究生教育资源、提高研究生教育质量、培养更多高素质的科技人才起到积极的推动作用。

作为科技国家队，中国科学院肩负着面向国家战略需求，面向世界科学前沿，为国家作出基础性、战略性和前瞻性的重大科技创新贡献和培养高级科技人才的使命。中国科学院研究生教育是我国高等教育的重要组成部分，在新的历史时期，中国科学院研究生教育不仅要为我院知识创新工程提供人力资源保障，还担负着落实科教兴国战略和人才强国战略，为创新型国家建设培养一大批高素质人才的重要使命。

集成中国科学院的教学资源、科技资源和智力资源，中国科学院研究生院坚持教育与科研紧密结合的“两段式”培养模式，在突出科学教育和创新能力培养的同时，重视全面素质教育，倡导文理交融、理工结合，培养的研究生具有宽厚扎实的基础知识、敏锐的科学探索意识、活跃的思维和唯实、求真、协力、创新的良好素质。

研究生教材建设是研究生教育中重要的基础性工作。由一批活跃在科学前沿,同时又具有丰富教学经验的科学家编写的中国科

学院研究生院教材，适合在校研究生学习使用，也可作为高校教师和专业研究人员的参考书。这套研究生教材内容力求科学性、系统性、基础性和前沿性的统一，使学习者不仅能获得比较系统的科学基础知识，也能体会蕴于其中的科学精神、科学思想、科学方法，为进入科学研究的学术殿堂奠定良好的基础；优秀教材不但是体现教学内容和教学方法的知识载体、开展教学的基本条件和手段，也是深化教学改革、提高教育质量、促进科学教育与人文教育结合的重要保证。

“十年树木，百年树人”。我相信，经过若干年的努力，中国科学院研究生院一定能建设起多学科、多类型、多品种、多层次配套的研究生教材体系，为我国研究生教育百花园增添一枝新的奇葩，为我国高级科技人才的培养作出新的贡献。

中国科学院 常务副院长
中国科学院研究生院 院长
中国科学院 院士

白春礼

二〇〇六年二月二十八日

前　言

任何商品一旦拥有某种人类社会所需要的效用之后，就意味着拥有了价值，即一种商品相对于另一种商品的边际效用程度。通常人们习惯的是以货币为单位的估值方式，按照弗里德曼的货币主义理论的观点，货币本身也是一种商品，拥有保存价值、交换价值的功能。一个拥有价值的商品，可以是资产和负债，可以是有形资产或是无形资产（如人力资源，大脑中的创意）。

在文明社会创造和接受价值这个概念后，接下来的问题是如何确定这个价值，即估值的问题。亚当·斯密自由主义经济学派认为通过市场这只“看不见的手”来确定价值是最公允的和最有效的。微观上讲，除了垄断者之外每个市场参与者（机构或个人）在同意或不同意一种商品的价值时，都面临巨大的挑战，因为确定价值所涉及的要素中充满着不确定性，这使得不论那种估值模型和方法如何时髦和复杂，整个估值的过程都是科学与艺术的结合，有欢乐，也有痛苦。

虽然目前市面上流行着许多估值的书籍，如著名的 Coplend 的《估值模型和方法》，但本书仍然拥有独特的风格。基于作者过去多年的实际金融工作经历和理论学术研究的成果，本书试图达到两个目的：一是为已拥有实际估值工作经历的业内人士提供一个他们已熟知的估值工具背后的经济和金融学原理，为他们今后进一步做好估值工作提供帮助；二是为在校的研究生在学习了各种估值模型之后如何在实际中具体使用和判断它们提供帮助。

在这里感谢我的博士生：胡光涛、张晓军、汤义锋、姜铁军、梁衡义、黄海平、夏路等为我写作本书所做的贡献。感谢程红梅、韩从一及朱姝娟所作的文字排版工作。

作者衷心希望有兴趣的读者在购买本书后对其进行“估值”有所助益。

程　兵

2006 年 10 月



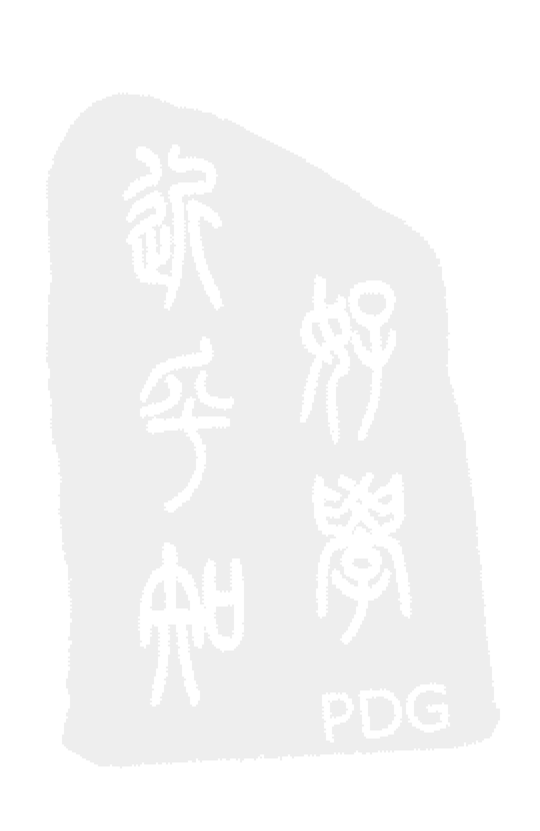
目　录



插图目录


PDG

表格目录


PDG

第1章

引言

§1.1 什么是价值，估值和定价模型？

什么是价值 (Value) 或价值标准 (Standard of Value) ？价值是日常社会生活或商业活动中最常用的词之一．人们对它有各种各样的解释．一般来说，我们能把价值视为一种度量或者是对一类资产或债务的大小排序．最流行的价值标准是"公允市场价值"(Fair Market Value)．公允市场价值是资产或债务的购买者或出售者在了解相关信息的条件下，自愿进行交易的价格．另一种流行的价值标准是账面价值 (Book Value)．它是指资产的净值．

什么是估值 (Valuation) 或定价 (Pricing) 呢？估值是获得一个目标物价值的过程之一，其目的是力图把价值置于金融实体之上．估值是把对公司整体或其某部分价值的预测转换成估计值的过程．最常用的估值方法有收入法、市场法、净资产价值法以及实物期权法等．

价值和估值以各种形式与公司和个人的商务活动相联系．在给出估值图之前，我们首先对商务活动进行分类．

1. 从产业组织链来看，市场可被划分为上游产业现货市场和期货市场、下游产业商品市场以及个人商品消费市场．这就产生了对现货和期货估值的问题．

2. 在上游产业和下游产业之间，还存在与企业和个人有关的商品生产．

(1) 公司为了生产商品，需要融资．融资有两种方式：直接融资，如在股票市场发行股票；间接融资，如从银行贷款．于是，就产生了对权益和债务的估值问题．

(2) 对于个人，有技能的人以各种形式将他们的技能出售给公司并得到支付，公司和社会则通过养老金和年金回报退休后的个人，从而产生了诸如管理层实物期权、年金、固定收益的养老金计划 (DB, Defined Benefit) 和固定贡献的养老金计划 (DC, Defined Contribution) 等与人力资源相关的估值问题．

(3) 为了帮助公司间接融资，某些特定的公司或信托应运而生。它们被称作金融中介机构，如商业银行、信托公司、投资银行和保险公司等. 这就产生了对证券化这种混合融资方式的估值问题. 从更一般的角度看，我们有金融估值的问题。

(4) 此外，公司本身就是可被出售或购买的“商品”，即所谓的并购 (M&A, Merge and Acquisition) 估值. 所有的估值被称为商业估值 (Business Valuation)。

(5) 对于个人而言，一旦以出售技能并从公司得到支付的方式找到工作，他们在其理财计划中就会面临各种估值问题. 例如，如何进行资产配置，怎样以较低的价格或公平价值购买住房，如何对投资基金估值以及怎样选择退休计划、年金等。

3. 一种常用的融资方式是以金融合约的形式出现的，且该合约可在金融市场中交易. 这时，该融资方式就成为一种金融工具，如股票、债券、可转债. 于是产生了对金融工具的估值问题。

4. 在法律和法规体系，政府行政干预和监督过程之中，我们需要用估值理论和方法来构建法律和法规中的条款。

5. 在服务业，如会计、审计、律师和财务计划中，我们需要基于会计和公允价值的估值方法。

6. 在文化市场，艺术、古董等文化产品已成为投资和资产配置中的一种资产类别. 于是，又有对文化进行估值的问题。

7. 在教育和知识市场，我们有对知识进行估值的问题，如专利估值、甚至对某一个想法“这样极端的无形资产”进行估值的问题。

因此，可以说估值遍及经济活动的每个角落. 以上的讨论为我们勾勒出一幅估值图 (见图 1.1)。其中涉及三种基本的估值工作。下面我们将详细探讨该图所表达的意思。

我们知道，价值标准和估值涉及诸多法人，如签署法律合约的个人、本身就是法人的公司，或者是以法律形式处理资产和债务的信托。在所有这些法人中，公司最为普遍. 任何公司的目标都是创造价值，即在遵循社会、财政、环境保护的法律框架下以及尊重员工、顾客、供货商和邻居等所有其他利益相关者的条件下，为股东增加公司的价值。

那么，怎样增加价值呢？这不外乎两种方式:

1. 以低于其经济价值的价格购买资产. 例如，在萧条 (危机) 时购买房产。

2. 以高于其经济价值的价格销售资产. 例如，在繁荣时出售房产。

经济理论和经验证据表明，创造价值的最佳方式是创新。这包括开发新产品，或者是像汽车制造商那样引进新生产线，或是提高劳动生产率，或是改进产品质量等。

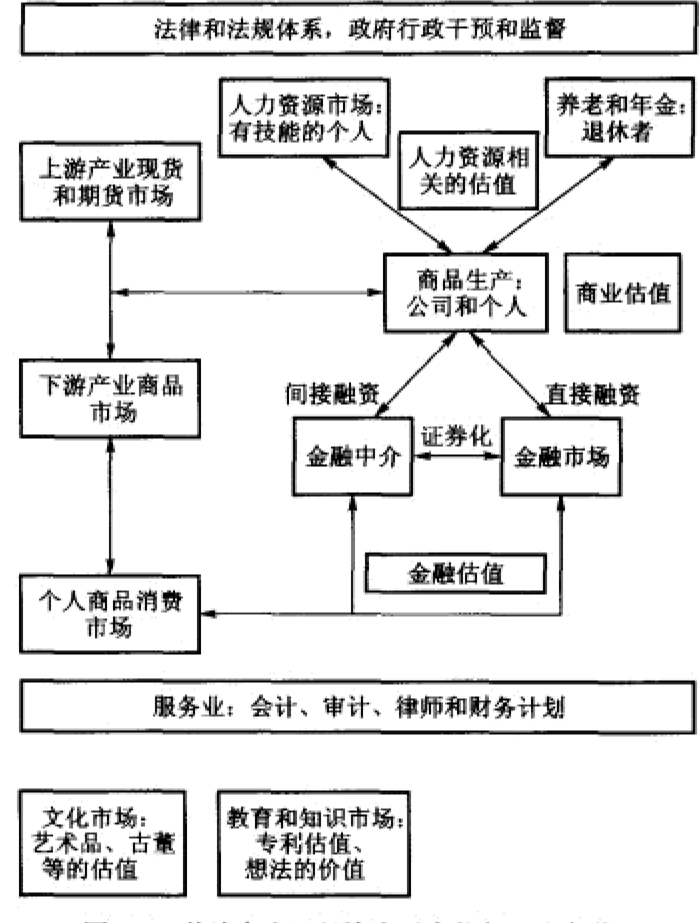


图 1.1 估值存在于经济生活中的每一个角落

§1.2 估值的例子

§1.2.1 基于金融工具估值的例子

§1.2.1.1 股票估值

股票是最常见的金融工具之一，其交易场所包括交易所市场和场外市场。对于在证券交易所内交易的股票，其流动性通常较高，投资者可以非常方便地买卖股票。

为股票估值分成两种流派：利用模型或数量化分析确定公司价值，称之为“定量化分析”。利用影响价格的各种因素由分析师进行逻辑分析，称之为“定性化分析”。只有定量化和定性化分析的有机结合才能实现成功的定价。估值模

型大致可以分为三种：现金流量折现法、可比公司法、相关交易法。估值方法在实践中和技术上有很大的差异性和多样性，一些特殊行业的估值方法并不局限于本书提及的这些方法，但从技术上来说，并未超出上述三种方法。每种方法都有自己的角度和侧重点，所以选择何种方法进行估值分析是一门艺术。

方法 1—— 现金流量折现法：最常用的估值模型是折现现金流 (DCF, Discounted Cash Flow) 模型，它又有许多不同的种类。其中，被普遍使用的是所谓的麦肯锡模型。它由 Copeland 、 Koller 和 Murrin 于 1990 年在他们的著作《估值 —— 度量和管理公司的价值》中提出。这一著作在某种程度上成为 DCF 估值的圣经。我们将它推荐给那些希望在本书范围之外，更深入了解麦肯锡模型的读者。

DCF 中的麦肯锡模型是一种特定的独立估值模型。还有其他模型，如 Stern & Stewart 咨询公司提出的经济增加值 (EVA, Economic Value Added) 模型、波士顿信贷集团开发的投资现金流收益模型。这些模型在许多方面与麦肯锡模型类似，且在一定的假设下，它们与麦肯锡模型是完全一致的。

麦肯锡模型 (以及其他所有现金流模型) 的主要思想是，公司当前的价值等于所有未来自由现金流以一定折现率折现到当前的价值，所用的折现率要反映这些现金流内在的风险水平。也就是说，使用者需要逐年估计和计算未来所有的自由现金流，并估计这些现金流对应的风险水平 (即计算折现率)，然后将其折现到当前。

为什么现金流模型特别是麦肯锡模型，如此受欢迎且被广为使用呢？这其中有许多原因。

1. 该模型理论上是“正确的”，且与金融理论及资本市场上使用的其他模型兼容，如资本资产定价模型 (CAPM) 和货币的时间价值模型。大多数金融学术界人士倡导该模型的事实明显地提高了它的受关注程度。

2. DCF 得到的公司价值与资本市场对公司的实际估值匹配得很好。估值模型给出了一个公司的理论价值，如果该公司被公开交易，我们就能将公司的实际价值与理论价值进行比较。当然，一个估值模型要有用，在某种程度上，它必须符合金融市场的估值。

3. 理论上， DCF 对所有的公司，从最小的高成长公司到成熟的跨国公司，都适用。

4. DCF 模型不受所谓的窗饰效应 (Window Dressing, 即账目被操纵或篡改以提高用数字表现的业绩) 的影响。既然 DCF 模型侧重于现金流，任何不影响现金流的账目度量都不影响 DCF 模型。

5. DCF 要求使用者了解公司运作的潜在商业和行业环境。这意味着进行估值时，分析师将需要考察创造和驱动公司及行业价值的基本因素。而在进行基

于相对倍数 (Relative Multiples) 或净资产的估值时，在一定程度上，估值人员不需要分析上述基本因素，从而可能出现由于缺乏仔细研究导致的错误.

需要注意的是，利润可能但未必一定代表现金流. 如前面所提到的，利润能轻易地被各种账目测量所左右，如表 1.1 所示. 总之， DCF 估值模型如此受欢迎的主要原因有：它理论上是正确的；它与市场价值相符；它适用于所有公司；它不受饰窗效应的影响；它使分析师对目标商业有很好的理解.

表 1.1 利润未必一定反映现金流

2001 财务年	Nike	IBM	Bespak	AstraZeneca
每股净收益	2.18	4.45	41.3	1.69
每股现金流	2.43	1.60	9.51	0.17
净收益与现金流之比 /%	90	278	434	994

在进一步考察 DCF 模型之前，需要提及的重要一点是，模型本身应该被视为一个计算器 —— 它只是一个根据你的输入产生公司价值的机器，它能得出你想要的任何值. 因此，运用 DCF 估值的主要困难不是构建模型，而是决定与公司和行业未来前景相关的输入变量. 即使对具有大量公司估值经验的专业估值人员，这也是很大的挑战. 因而，进行 DCF 估值时，需要花费相当多的时间，关注所谓的基本分析 (Underlying Analysis) . 标准的麦肯锡 DCF 模型包括如下四个主要步骤：

1. 估计资本成本 —— 加权平均资本成本 (WACC, Weighted Average Cost of Capital) .

2. 计算自由现金流.

3. 计算最终价值.

4. 折现并得到公司价值.

方法 2—— 可比公司法：此方法的要素包括：

1. 选择合适的可比公司，包括 (1) 可比公司的标准：从事同一行业或同一业务，最好为同一市场的公司，具有类似增长率，股本规模大体相当. (2) 同类公司分析要注意该行业或业务发展的经济效益、发展前景、公司经营的利润和资本结构.

2. 选择合适的方法，确定公司的估值基数和相应的倍数范围. 可采用的方法有多种，其中最常用的包括 (1) 市盈率 (PE) 倍数法， (2) 收入倍数法等方法.

市盈率倍数法：市盈率倍数法是将股票价格与公司的盈利状况联系起来的直观做法，并且上市公司的市盈率非常容易计算，因此应用最为广泛. 其中

$$\text{市盈率} = \text{每股股价} \,/\, \text{每股净收益}$$

$$\text{股权} = \text{市盈率} \times \text{公司净收益}$$

该法适用于发展比较成熟的行业和公司. 不同国家和公司的不同会计准则使得每股盈利可比性减弱。为把不同国家、不同时段的公司进行比较，有时会使用相对市盈率的概念。

相对市盈率 = 公司市盈率 / 当地市场平均市盈率

有时基本因素的变化和不同可能导致比较无法进行.

收入倍数法: 收入倍数法是根据销售收入与股票价格之间的关系来确定公司价值的. 其中

公司总价值 = 公司收入 × 估计的可比公司的收入倍数

这种方法的优点是在任何时候都可以使用，即使对最困难的、利润很少甚至没有利润的公司也是适用的。因此，像一些新兴行业的公司，如 Internet 公司就是利用收入倍数法来估值的。与净利润不同，收入不受折旧、存货等会计制度的影响，不易被人扩大。并且，相对而言，易变性和敏感性较低，稳定性强。当公司内部成本控制出现问题时，收入很难反映公司的实际财务状况。因此，在选择可比公司时，要识别公司之间投入和成本之间的差别.

方法 3—— 相关交易法: 相关交易法是对过去发生的有关交易，如过去发生的收购或兼并，进行分析以确定公司的价值, 进而得到公司股票价格。这种分析的目的也是寻找确定适合的估值方法和倍数范围. 与可比公司法相比，相关交易法的特点如下： (1) 每笔交易的性质不同； (2) 每笔交易的背景不同； (3) 每笔交易发生的时点不同。相关交易法在上市发行 (IPO) 估值中不太常用，因为估值易受人为因素的影响，并且相关案例不易找到。

§1.2.1.2 债券估值

中国目前大部分浮息债 (FRN, Floating Rate Note) 是基于银行存款利率加固定基点，而不是像国际通行的是基于伦敦银行间同业拆借利率 (London Interbank Offered Rate) 加利差 (Spread) 基点的产品。以国债 010004 为例 (见表 1.2), 我们可以看到交易所 1 年期的即期利率与银行 1 年期的定期存款利率有很大的不同 (见图 1.2) 。

现在我们来看一下对浮息债是如何定价的. 我们知道一般债券的定价公式为：

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T-1} \frac{C_t}{(1+S_t)^t} + \frac{C_T + M_T}{(1+S_T)^T} \tag{1.2.1}$$

其中 $S_1, \cdots, S_T$ 为即期利率，M_T 为到期还本的本钱, 一般是一个单位 100 元, $C_1, \cdots, C_T$ 为期间支付的利息. 对于像 010004 这样的浮息债来讲，我们有：

$$C_t = (B_{t-1} + Z)M_T, \qquad t = 1, 2, \cdots, T \tag{1.2.2}$$

表 1.2 浮息债 ——010004 的基本信息

债券代码	010004	债券名称	20 国债 (4)
债券类别	国债	计息方式	浮动利率
期限 / 年	10	年利率 /%	—
计息开始日	20000523	计息结束日	20100523
付息方式	每年付息一次	基本利差 /%	0.62
发行开始日	20000523	发行结束日	20000530
发行价 / 元	100	面值 / 元	100
发行额 / 亿元	140	发行量 / 万张	14 000
发行手续费 /%	0.22	兑付手续费 /%	0.05
发行方式	记账式	交易开始日	20000602
发行对象	境内经人行批准的机构和法人		
发行人	财政部		

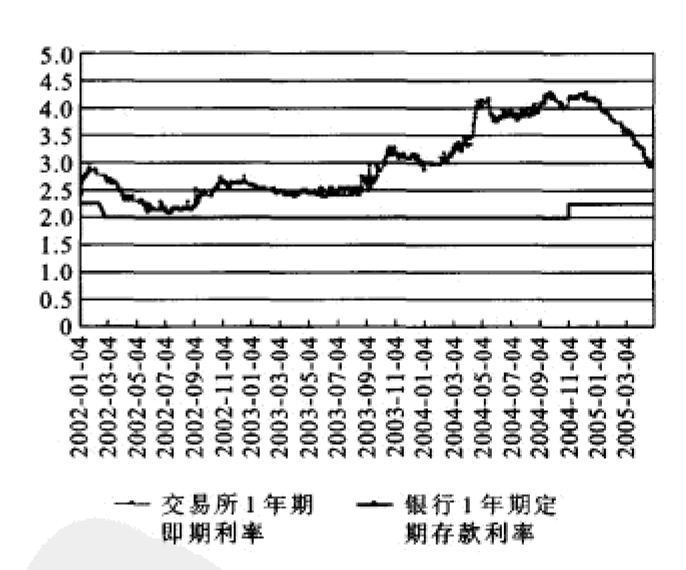


图 1.2 交易所 1 年期即期利率与银行 1 年期定期存款利率

其中 B_{t-1} 为第 $t-1$ 时刻的银行一年期存款利率水平 (从 $t-1$ 到 t 时刻),Z 为基本利差。由于 010004 债券是在上海证券交易所交易，图 1.2 是它的日到期收益率 (Yield to Maturity) 时间序列. 由于银行存款利率水平由央行根据其货币政策来决定是否变动, 因此银行一年期存款利率不会经常变动, 波动性也不大. 从另一角度讲，交易所每日均进行交易，因此利率期限结构 $\{S_1,\cdots,S_T\}$ 每日均可能发生变化。设 $F_{t,t+1}$ 为交易所从 t 到 $t+1$ 时刻的远期利率 (Forward Rate), 我们知道

$$F_{t,t+1}=\frac{(1+S_{t+1})^{t+1}}{(1+S_t)^t}-1 \tag{1.2.3}$$

由于银行一年期存款利率的不常变动性和远期利率的经常变动性，我们可以知道在大多数情形下

$$F_{t,t+1} \neq B_t, \qquad t = 1, \cdots, T$$

由于以上事实，我们将看到 010004 浮息债存在跌破面值的风险. 由于

$$\begin{aligned} C_t &= B_{t-1}M_T + ZM_T \\ &= F_{t-1,t}M_T + (B_{t-1} - F_{t-1,t} + Z)M_T \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

这样

$$\begin{aligned} P_0 =& \sum_{t=1}^{T-1} \frac{C_t}{(1+S_t)^t} + \frac{C_T + M_T}{(1+S_T)^T} \\ =& \sum_{t=1}^{T-1} \frac{C_t}{(1+S_t)^t} + \frac{F_{T-1,T}M_T + M_T}{(1+S_{T-1})^{T-1}(1+F_{T-1,T})} + \\ & \frac{(B_{T-1} - F_{T-1,T} + Z)M_T}{(1+S_T)^T} \qquad (1.2.5) \\ =& \sum_{t=1}^{T-2} \frac{C_t}{(1+S_t)^t} + \frac{C_{T-1}}{(1+S_{T-1})^{T-1}} + \frac{M_T}{(1+S_{T-1})^{T-1}} + \\ & \frac{(B_{T-1} - F_{T-1,T} + Z)M_T}{(1+S_T)^T} \\ =& \cdots = M_T + \sum_{t=1}^{T} \frac{(B_{t-1} - F_{t-1,t} + Z)M_T}{(1+S_t)^t} \\ =& M_T + \Delta_T \qquad (1.2.6) \end{aligned}$$

因此，我们可以看到在投资者预期市场利率上升阶段，由于央行货币政策和加息滞后性，将带来两个利率基准的利差

$$B_{t-1} - F_{t-1,t} + Z < 0$$

从而 $\Delta_T < 0$. 这样中国式的浮息债 (FRN) 就会出现在标准的浮息债定价 (如以 LIBOR 为基准) 中 “不可思议” 的事情:

$$P_0 < M_T$$

即跌破面值！并且市场也是如此对 010004 定价的 . 见价格走势图 1.3 .

如果像国际通行的基于 LIBOR 利率加固定基点的方法来定价，则浮息债的面值永远不会低于 100 元，但国内浮息债可能低于面值 100 元！

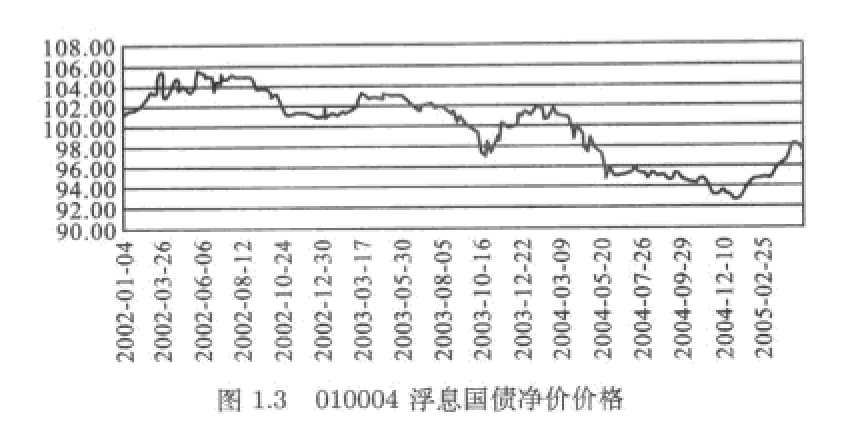


图 1.3 010004 浮息国债净价价格

注记 (锁成本稳收益，货币基金“控盘”新浮息债) *以银行间市场 7 天回购为基准的新浮息债，成为货币基金“控盘”品种。截至 2005 年上半年，17 只货币基金持有的新浮息债总量达到了 225.29 亿元，占了新浮息债发行总量的 41%。*

自 2004 年国家开发银行率先发行 04 国开 17 这一新浮息债券品种以来，截至 2005 年 6 月底银行间债券市场共发行了 6 只新浮息债，共计发行量为 550 亿元。相比以一年银行定期存款为浮动基准的老式浮息债，新浮息债是以银行间回购市场 7 天回购利率为浮动基准，其优势在于可以锁定市场资金成本，稳获利差收益，并且一年分四次付息，因此颇对货币基金的胃口。

到 2005 年上半年，17 只货币基金合计持有新浮息债达到 225.29 亿元，“控盘”比例达到了 41%。其中，货币基金在以银行间 7 天回购 B2-W04 为基准、发行期限为 3 年的 04 国开 17 券的持有量最高，达到 67.02 亿元，占了该券发行总量的 67.02%。另一只期限为 5 年的 04 国开 20 券的持有量也达到了近 42%。

但是，值得关注的是，流动性欠佳的银行长期次级债券品种也成为货币基金的重仓品种。例如，发行年限为 10 年的 04 建行 03 浮动利率债券，发行量仅为 60 亿元，但是货币基金的持有量达到了 35 亿元，占比高达 58%。同样，在发行年限为 10 年的 05 中行 02 浮息债上，货币基金的持有量也达到了 33.76%。

尽管新浮息债能锁定资金成本，并且可以带来固定的现金流，但是基金如此高比例持有新浮息债并非没有隐忧。其中，最大的问题就是流动性。从目前情况来看，新浮息债在货币基金整体的债券投资额中，所占的比重还不算太高，大约为 16.7%。但是，在个别货币基金的投资比重中的占比颇大。例如，04 建行 03 浮息债被 5 只货币基金重仓持有，平均每只基金持有量达到了 12 亿元。而 05 中行 02 浮息债也同时被 7 只货币基金重仓持有。

> 业内人士认为，货币基金主要为投资者进行流动性资金管理，因此其所持有的债券通常具有期限短、流动性强的特点，以便随时变现应对突发性的大额赎回。但是货币基金高比例持有新浮息债后，首先就会导致这些债券产品的流动性缺失，加之投资者高度趋同，将进一步提高新浮息债的变现难度，除非货币基金能将这些债券最终持有到期。

§1.2.1.3 期权定价

在实际期权定价过程中，最重要的因素是隐含波动率 (Implied Volatility) . 隐含波动率经常变化，且这些变化对交易策略的结果有巨大影响，因此，期权的隐含波动率水平是非常重要的信息。理解隐含波动率为何变化以及它如何影响交易决策至关重要.

可以根据期权和保险之间的相似性来解释隐含波动率为什么变化。期权波动率和保险中的风险因子相似，其中保费取决于风险水平. 例如：若保险公司已有的纪录表明每 100 个家庭中有 1 个受火灾，则火险的保费等于家庭价值的 1% 加上保险公司的利润. 但是如果保险公司觉察到将来火灾破坏的家庭比例会高于过去，它将增加保费. 类似地，如果公司认识到以后火灾将毁坏更少的家庭，保费则会降低。然而，保险公司处于一个竞争的市场环境，一些保费是为了“满足竞争”。这意味着保费有时高于计算出的水平，有时低于计算出的水平.

历史波动率就好比保险公司关于实际情况的纪录，预期波动率就像某特定保险公司对未来风险的看法，隐含波动率像市场上的竞争性保费水平. 期权市场和保险市场一样，其中有许多参与者进行竞争. 对未来市场状况的判断通过影响供给和需求的力量对比来决定隐含波动率水平. 既然这种判断会发生变化，隐含波动率就会随之改变.

例如，当一个公司声明“下周将有一个重要的公告”时，隐含波动率可能增加。在声明发表前，有理由相信股票价格的未来波动与过去相同。因此，期权价格的隐含波动率可能接近历史波动率。但是，公告可能改变预期.

公告后，有理由相信股价会大幅变化，至于到底是上升还是下降，则取决于消息的好坏。预期的改变可能意味着期权的购买者愿意支付更高的价格，期权的出售者希望获得更高的价格. 市场参与者观点的这些变化表明隐含波动率增加了.

隐含波动率在这个重要的公告后也可能下降. 如果公告减少了人们对未来股票价格变化的担忧，那么期权的出售方将愿意接受更低的价格，期权的购买方只愿意支付更低的价格. 因此，隐含波动率将降低.

通常，人们发现解释和使用隐含波动率并非一件容易的事情. 实际上，隐含波动率在期权定价中的作用如同市盈率在股票估值中的作用一样.

市盈率倍数 使得我们可以对不同公司进行比较，而不必顾及公司诸多变量值之间的差异，这些变量从流通的股票数、公司资产的价值到总销售额，不一而足。如果 A 公司的市盈率是 15 倍， B 公司的市盈率是 20 倍，则表明 A 公司正以比 B 公司低的每股价值交易。即使 A 公司有 60 亿的销售额和 100 元的股票价格， B 公司有 10 亿的销售额和 50 元的价格，这一结论也成立。其他常用的指标是每股账面价值、每股销售额以及收益的增长率，这些以每股计算的变量值为主观判断某特定股票的价值提供了依据。

隐含波动率之于期权价格如同市盈率之于股票价格。隐含波动率是使期权之间可比的一个常用指标。借助于隐含波动率，标的股票不同的两个期权价格能够进行比较，同一期权在不同时间的价格也能被比较。

考虑 C 公司的一个期限为 90 天、执行价为 40 美元、交易价格为 3 美元的看涨期权。若不知道该期权的隐含波动率，我们不可能将其与 D 公司的一个期限为 45 天、执行价为 65 美元、价格为 4.25 美元的看涨期权进行比较。可是，如果知道 C 公司的隐含波动率是 30%, D 公司的隐含波动率是 40%, 那么就可以描述和比较两个期权的相对价值。

隐含波动率使我们也可以比较同一期权在两个不同时间的价格。假设一个看涨股指期权的执行价为 450, 在日期 1 时，指数值为 448, 期权还剩 85 天到期，其价格为 4.75, 隐含波动率为 35% 。如果在日期 2, 指数值为 452, 该期权还有 65 天到期，价格为 5.5, 对应的隐含波动率为 25%, 那么我们可以说，就波动率而言，与日期 1 相比，该期权在日期 2 对购买者有更高的相对价值。也可以说在日期 2, 期权的总价格较高，距到期日较短。我们上面提到的期限，执行价和交易价是描述一个期权的三个变量。

同市盈率一样，隐含波动率是能被用于主观决策过程某阶段的信息，但是隐含波动率和市盈率都没有给出购买或出售的具体建议。

34% 的隐含波动率高吗？ 12% 低吗？对这种问题，只能作出相对的回答，而没有绝对的答案。通过跟踪分析隐含波动率，交易者能了解过去的情况，因此能做出更知情的预测。这并不保证预测是准确的。但是一般来说，基于更多信息的预测会更好。

§1.2.2 金融估值的例子

直接融资的估值 —— 股权风险溢价

上面我们已经给出了股票估值的例子。然而，我们还留下一个重要因素 —— 股权融资的成本。关于股权成本，最为重要的是股权风险溢价 (Equity Risk Premium)。股权风险溢价 是指股票资产与无风险资产之间的收益之差。股票资产一般是指普通股，而无风险资产则是指实际收益等于预期收益的资产。其中，无风险资产必须满



足两个条件：一是不存在违约风险，二是不存在再投资收益率的不确定性。事实上，符合这两个条件的证券只能是政府债券。正因如此，股权风险溢价又被定义为“普通股的收益率与政府债券收益率之间的差别”(Bradford Cornell,1999)。虽然在理论上可以用任何国债来衡量股权风险溢价，但在实际中仅使用两种债券：第一种是短期国债，第二种是长期国债。

任何企业筹集资金的方式只有两种：内部融资和外部融资。外部融资主要有两种方式：股权融资，债务融资或混合融资（如可转债融资）。股权融资一般采取股票的形式，而债务融资一般采取债券的形式。表面上来看，外部融资的两种方式之间的区别是由于采取了不同的证券形式，但实际上两者的差别根源于两种融资方式现金流量索取权的不同性质。我们首先从股票与债券自身的特性方面对两者的差别作一比较。

股票和债券的差异： 股票和债券的差异主要表现在以下几个方面：

1. 现金流量差异。债券属于固定收益证券，债券持有人有权获得合同所规定的现金流量（通常是利息和本金的偿付，利率在事前已定），所以，债券的现金流量是确定的；而股票持有人通常要在公司所承诺的其他索取权得到满足后才有权获得余下的现金流量（即所谓的“剩余索取权”(Residual Claim)），股票持有人是否能够分得股利与分得多少要视公司的盈利状况与股利政策而定，故其现金流量存在很大的不确定性。现金流量差异是股票与债券所有差异中最本质的差异。

2. 期限差异。股票一般是永久性的，不存在到期日；而债券是有期限的，到期必须偿还本金，且须定期付息。

3. 税收差异。税法对利息费用和股利的处理不同。总的说来，对利息费用的处理要比对股利的处理更为优惠。股东从公司税后利润中分享股利，而且股票本身增值或贬值的可能性较大；债券持有者则从公司税前利润中得到固定利息收入，故有“税收节减”效应，而且债券面值本身增值或贬值的可能性不大。

4. 求偿等级差异。求偿等级是指要求偿还财产的先后顺序。在求偿等级上，股东的排列顺序在债权人之后。债务索取权无论是对公司每期产生的现金流量（用于利息和本金的偿还）还是在清偿时对公司的资产都有优先权。

5. 控制权差异。股东可以通过投票来行使对公司的管理控制权，而债权人一般没有投票权，也就没有对公司的管理控制权，但他可以在债务合同中利用限制性条款来约束经理与股东。另外在公司破产的情况下，剩余控制权将由股东转移到债权人手中（这是因为公司在破产时，其剩余资产往往不足以清偿所有债务），债权人有权决定是清算公司还是重组公司。

6. 抵押担保差异。股权资本是一种风险资本，不涉及抵押担保问题，而债务资本可要求以某一或某些特定资产作为保证偿还抵押担保品，这实际上降低

了债务人无法按期还本付息的风险，即降低了违约风险 (Default Risk)，或者说是降低了信用风险 (Credit Risk)。

7. 选择权差异. 在选择权方面，股票表现为可转换优先股和可赎回优先股，普通股不存在转换与赎回。债券则不同，一方面多数公司在公开发行债券时都附有赎回 (Redemption or Call) 条款，在某一预定条件下，由公司决定是否按预定价格 (一般比债券面值高) 提前从债券持有者手中购回债券；另一方面，许多债券附有可转换条款，这些可转换债券在到期日或到期日之前的某一期限内可以按转换比率或转换价格转换成股票. 债券与股票的差别见图 1.4。

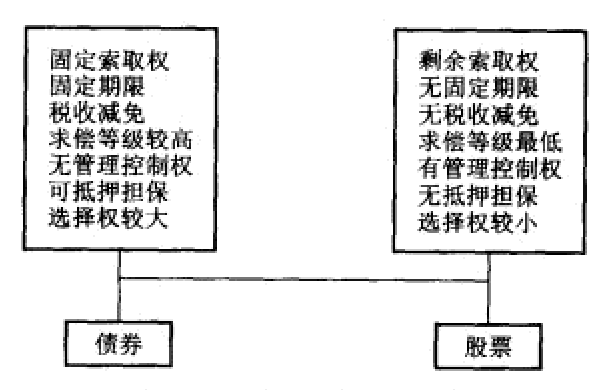


图 1.4 债券与股票的差别

从股票与债券的上述差异中，可以明显地看出，金融工具的不同特性决定了它们具有不同的风险特征. 股票与债券是两种不同的有价证券，它们之间的风险差异是客观存在的，总的说来，股票的风险要大大超过债券. 上面的比较是将股票与债券作为两种不同的金融工具从总体上进行对比分析的，如果是比较普通股与政府债券，则这种差异就更突出了. 政府债券不仅现金流固定，而且更主要的是它不存在违约风险，在各类债券中是风险最小的；而普通股的风险本身又大于优先股，在股票中的风险最大，所以两相对比，风险差别是非常明显的. 下面，我们再从融资偏好次序的角度进一步分析股票与债券的不同.

融资偏好次序：根据融资偏好次序理论 (Pecking-order Theory)，公司的管理者对融资的方式是有偏好的. 管理者首先会选择内部融资方式，即使用公司的留存收益. 当公司的现金流不足以投资于公司希望的投资机会，而“粘性”的股息政策又排除了削减股息的可能时，则必须进行外部融资. 此时管理者首先会选择低风险的债券，因为债权人对公司的管理干预较少，筹资成本也会低于其他类型的外部融资方式. 其次，管理者才会考虑发行股票，这不仅因为股票持有者对公司的干预在所有融资方式中是最强的，而且因为股票的风险和筹资成本也较其他融资方式要高.

价值角度分析：资产的价值通常被定义为信息充分的投资者在自由竞争的



市场上购买该资产时必须支付的价格。在投资分析中，折现现金流方法是衡量资产价值的一种最基本的方法。折现现金流方法又称为收入资本化法 (Capitalization of Income Method of Valuation) 或收入法 (Income Approach), 该方法认为任何资产的内在价值 (Intrinsic Value) 决定于投资者所持有的该种资产的预期未来现金流的现值。由于股票的未来现金流是以股息和红利的形式表现出来的，所以，DCF 应用于股票的价值分析又被称为股利贴现模型 (DDM,Dividend Discount Model) 。实际上两者是一致的，其原理都是基于货币的时间价值。

如果用 P 来表示资产的价值，则根据 DCF 模型，资产的价值

$$P = \frac{c_1}{1+r} + \frac{c_2}{(1+r)^2} + \frac{c_3}{(1+r)^3} + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{c_t}{(1+r)^t} \tag{1.2.7}$$

其中 c_t 为第 t 期的现金流量； r 为折现率，又称资本化率 (Rate of Capitalization) 。

由上述公式可以清楚地看出，证券的价值取决于两个因素：预期现金流量和折现率。折现率反映了货币资本的时间价值，它主要取决于市场利率。在金融市场上，市场利率总是处于不断变化之中，因而折现率是个非常不确定的因素，投资者只能对其未来的走势进行预期，而不能完全加以确定。债券的预期现金流量包括持有期间每期的利息支付和到期时的本金偿还，由于本金和利率在合同中已事先定好 (即 c_t), 所以债券的预期现金流量是固定的，不存在不确定性，唯一不明朗的是折现率 r, 也就是说，在决定债券价值的两个因素中，仅有一个因素是不确定的。再来看看股票。由于股票不存在到期日，股票的现金流只包括预期每年的股利支付。预期股利取决于两个方面：一是公司未来的预期盈利状况；二是公司未来的股利分配政策。公司未来的预期盈利状况除了与公司当前的财务状况和经营状况有关系外，主要取决于预期经营业绩，而公司的预期经营业绩又与整个经济环境、商业周期和公司的经营决策密切相关，显然这些因素都是不确定的，从而公司的预期盈利也是不确定的，预期盈利的不确定性带来了预期股利的不确定性。不同的管理者在公司的不同发展阶段倾向于不同的股利分配政策，而股利分配政策直接决定了未来预期现金流的多寡，股利分配政策的不确定性同样也带来了预期现金流的不确定性。股票的折现率与债券的折现率具有相同的性质，是个难以确定的因素。由于决定股票价值的两个因素股利和折现率都是不确定的，而决定债券价值的因素只有一个折现率是不确定的，因此，股票的风险要大于债券。在金融市场中，一般假定投资者都是风险厌恶型的。风险厌恶的一个明确含义是投资者承担的风险越大，他所要求得到的风险溢价也就越高。这就是股权溢价通常为正以及股权融资成本高

于债务融资成本的原因．由于股票、债券和现金的风险收益特征不同，股票是高风险资产，债券中的长期债和企业债是低风险资产，现金和短期国债则是无风险资产，因此不同的资产配置策略对应着不同的风险和收益组合．股权溢价体现了对投资者承担风险的一种补偿，所以长期的股权溢价水平就成为长期资产配置的依据之一．第二章将正式给出股权溢价的经济学定义．

§1.2.3 商业估值的例子

§1.2.3.1 金融工具确认和计量暂行规定

2005 年 9 月 23 日，我国财政部就草拟的《金融工具确认和计量》、《金融资产转移》、《套期保值》和《金融工具列报和披露》等四项会计准则公开征求意见．至此，除准备择机而出的《股票期权》准则以及可能会颁布的《证券投资基金》准则外，新准则的制定工作已经告一段落．

征求意见稿对金融工具的主要分类及确认和计量方法见表 1.3．

表 1.3 征求意见稿对金融工具的主要分类及确认和计量方法

金融资产分类	初始确认	后续计量方法	减值的处理
交易性金融资产	公允价值	以公允价值计量，价值变动计入当期损益	不计提减值
持有至到期投资	公允价值	按实际利率法，以摊余成本计量	通过计提减值反映价值变动，减值损失计入备抵科目，待损失实际发生时，冲减备抵科目．减值损失一经确认，不得转回
贷款和应收款项	公允价值	按实际利率法，以摊余成本计量	通过计提减值反映价值变动，减值损失计入备抵科目，待损失实际发生时，冲减备抵科目．减值损失一经确认，不得转回
可供出售金融资产	公允价值	以公允价值计量，价值变动计入资本公积，待终止确认时，转出并计入当期损益	若原计入资本公积的是损失（借方余额），则在发生减值时，将累计损失从资本公积转出计入当期损益．对于确认的可供出售金融资产的权益工具的减值损失，不得通过损益转回；确认的债务工具的减值损失，不得转回

金融负债分类	初始确认	后续计量方法
交易性金融负债	公允价值	以公允价值计量，价值变动计入当期损益
其他金融负债	公允价值	按实际利率法，以摊余成本计量

《金融工具确认和计量》征求意见稿借鉴国际《IAS39》准则，将金融资产划分为"交易性金融资产"、"持有至到期投资"、"贷款和应收款项"以及

"可供出售金融资产"，并且要求采用公允价值或摊余成本予以计量. 除"交易性金融资产"外, 其他三类资产都须进行减值测试, 并且减值损失一经确认不得转回. 征求意见稿还将金融负债划分为"交易性金融负债"和"其他金融负债"两类。

交易性金融资产公允价值 (Fair Value) 的变动将会产生利得或损失，这将改变现在会计实务中短期投资只确认减值不确认升值收益的情况；将衍生金融工具纳入表内核算不仅将增加企业的资产或负债，同时也将影响当期损益.

《金融工具确认和计量》准则中，对公允价值进行了定义，并且详细规定了公允价值的确定方法，为本准则及其他在计量上采用公允价值的准则提供了操作指引。

《金融工具确认和计量》准则中，对以下名词进行了解释，主要有：

实际利率：将金融资产或金融负债在预计期限内的未来现金流量，折现为该金融资产或金融负债当前账面价值所使用的利率。

金融资产或负债的摊余成本：指该金融资产或金融负债的初始确认金额在扣除偿还的本金，加上或减去采用实际利率法将初始确认金额与到期日金额之间的差额进行摊销形成的累计摊销额，扣除该金融资产发生的减值损失或无法收回的金额后的余额.

累计损失：可供出售金融资产的初始取得成本，扣除已收回本金和摊销金额，发生减值时的公允价值和原计入损益的减值损失后的净额.

关于衍生金融工具, 其会计处理分别由该准则以及《套期保值》准则来规定。若属于该准则所规定的交易性金融资产或金融负债，则根据该准则的相关规定进行处理；若属于企业进行套期保值时的套期工具，则由《套期保值》准则予以规定. 征求意见稿规定了嵌入衍生金融工具入账价值的确认方法：对于有活跃市场报价的嵌入衍生金融工具，将混合工具整体的公允价值与主合同的公允价值之间的差额，确定该嵌入衍生金融工具的公允价值.

征求意见稿对公允价值定义为在公平交易中，熟悉情况并自愿的交易双方进行资产或债务清偿的金额。征求意见稿还对"交易双方"进行了说明，要求是持续经营企业，不打算或需要进行清算、重大缩减经营规模或在不利条件下进行交易。需要说明的是，虽然征求意见稿中，只是说明了金融工具的公允价值的确定方法，但事实上，这也是唯一对公允价值确定方法进行规定的准则，其他准则在计量上涉及公允价值的，其确定方法都参照本准则的规定.

对于公允价值的确定方法，征求意见稿规定：如果相关资产或负债有活跃市场价格的，应当以活跃市场中的报价作为其公允价值确定的基础，除非有确凿证据表明市场报价不是公允的，才需要进行调整；对于不存在活跃市场价格的资产或负债，应当采用估值技术作为确定其公允价值的基础，运用估值技术

得出的结果，应当反映估值日在公平交易中采用的交易价格，并且需要定期采用实际交易价格来测试估值技术的可靠性。

用估值技术确认金融资产或金融负债的公允价值是本准则在执行上的一大难点，目前国内的执业水平还很难达到这样的要求．即使是采用实际利率法计算摊余成本，对于国内银行界来说，也是非常大的挑战．

§1.2.3.2 风险投资和私人股权

近年来，两种私人投资工具 —— 风险资本 (Venture Capital) 和私人股权 (Private Equity) 在资产配置中发挥着重要作用．与对冲基金仅试图利用市场的失衡不同，风险资本是投入到一个初创企业，私人股权是进入一个成熟企业 (公共的或私人的)．两者都将改善企业的基本面．因而，《经济学家》杂志 (Economist)2005 年 4 月的一篇文章称私人股权为资本主义的新国王．

企业需要资本．初创企业，特别是风险和潜在收益都很高的创新型企业，所需资本通常远远高于创始人自身拥有的资金，这意味着创业家必须寻求其他投资者．企业在制定商业计划时对投资者的需求加以考虑，这对于企业的成功具有深远影响．投资者需要获得投资收益．预期收益在很大程度上取决于投资风险：风险越大，预期的收益就越高．投资者通常采用内部收益率 (IRR) 计算投资收益，此种计算方法得出的是投资生命期内收益率的年度百分比．简言之，如果内部收益率为 60%，就意味着投资者在投资期内，每年获得的资金总额为原始资本加上占原始资本 60% 的资金．当然，精明的投资者不会仅仅依靠内部收益率一个指标，因为该指标的假设条件可能存在误导性．而且，更为重要的是，内部收益率所依靠的变量在投资初期都是未知的，特别是投资期限和销售价格这两个变量．还有一点也很重要，就是要清楚投资者从不仅仅在一家公司投资，他们在构建一个投资组合，并将这些投资视为一个整体．他们知道绝大多数公司都会彻底失败，有一些会成功，另有少数公司能非常成功．因此，组合内的每家公司都必须具有非常成功的潜质，因为它们要弥补失败企业的投资损失．简单的算术就能说明投资者面临的障碍．比如，某投资者打算投资 10 家公司，每家投 100 万英镑，期限 5 年．该投资者要求获得与美国风险资本初期平均收益率相等的投资收益，即内部收益率超过 20%，5 年后该投资者的资金总额必然翻番．假设 10 家公司中有 6 家失败，2 家的内部收益率达到 20%，那么最后 2 家的内部收益率必须达到 140%．也就是说，这 2 家公司的价值 5 年内必须达到 800 万英镑，这种增长令人震惊．虽然精明的投资者可能不会仅根据内部收益率作出判断，但对同样精明的创业家而言，他们的提议要表现出企业有潜力达到投资者要求的内部收益率水平．创业家面临的难题是，可用以投资的资本有多种类型，且并非一定以初创企业为投资目标．比如，有丰富多样的低风险资本，如银行贷款．此外，可用于企业收购的资本，以及大型企业供现有部分管理层收购其所在部门 (即管理层收购，MBO) 的资本也很丰富．这类交易的风险也较低，因为作为投资对象的企业已经存在，可以



对其进行分析．第三种资本类型可用于对相对成熟的创新企业进行投资．这些企业已有产品或服务 (从而降低了技术风险)，已有销售业绩 (从而降低市场风险)，拥有高效的管理团队 (从而降低人员风险)，只是尚未进入快速增长轨道．尽管这类企业仍被归到高风险范畴，但在投资者看来，这类企业拥有颇具吸引力的风险和回报平衡．对尚无最终产品或服务、没有销售业绩并且尚未聘用核心管理人员的初创企业而言，寻找投资者的难度则大得多．在最需要投资者的时期，企业最难找到投资者．在这种情况下，初创企业获得资本的唯一途径，就是创业家要着力向投资者表明，他们清楚各种风险因素，并向投资者提交一份有说服力的商业计划，提供所有表明可以降低风险的数据．没有最终产品，不应妨碍创业家表明市场对产品可能存在的需求．企业可以接触到潜在客户，分析他们的问题和需求，测算这些问题的成本，并确定客户是否愿意购买为解决其问题而设计的产品．简言之，虽然初创企业获得风险资本绝非易事，但并非做不到．成功的创业家能够领会投资者的心思，能够理解并支持投资者的需求．

§1.2.3.3　矿产资源型公司的价值 (由存量资源来决定公司的经济价值)

稀缺性、产业链、战略规划和开采成本是决定资源型上市公司投资价值的关键因素．至 2004 年，沪深股市共拥有兖州煤业、国阳新能、西山煤电、金牛能源、上海能源、开滦股份、郑州煤电、兰花科创、神火股份、恒源煤电和盘江股份等 11 家以煤炭开采业务为主的上市公司，属于典型的资源型上市公司．见图 1.5．

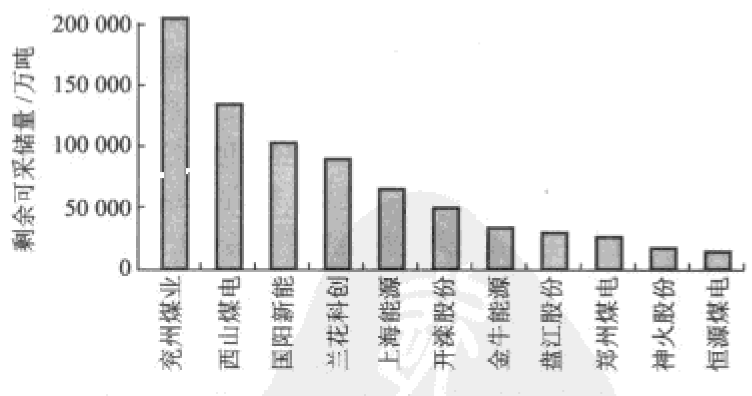


图 1.5　煤炭上市公司投产矿山剩余可采储量

现在，我们将经济价值定义为

$$经济价值 = 剩余可采储量 \times 煤炭平均价格$$

以 2004 年煤炭销售均价和剩余可采储量测算，煤炭上市公司经济价值排名前 3 位的依次是兖州煤业、西山煤电和上海能源，分别为 6 056 亿元、 3 678 亿元和 1 856 亿元；经济价值总量排名后 3 位的依次是郑州煤电、神火股份和恒源煤电，分别为 364 亿元、 333 亿元和 241 亿元．见图 1.6．我们认为，经济价

值对于比较不同上市公司拥有资源的价值大小具有重要参考意义，但由于价格变动频繁，因此与资源未来实现的价值具有一定偏差。

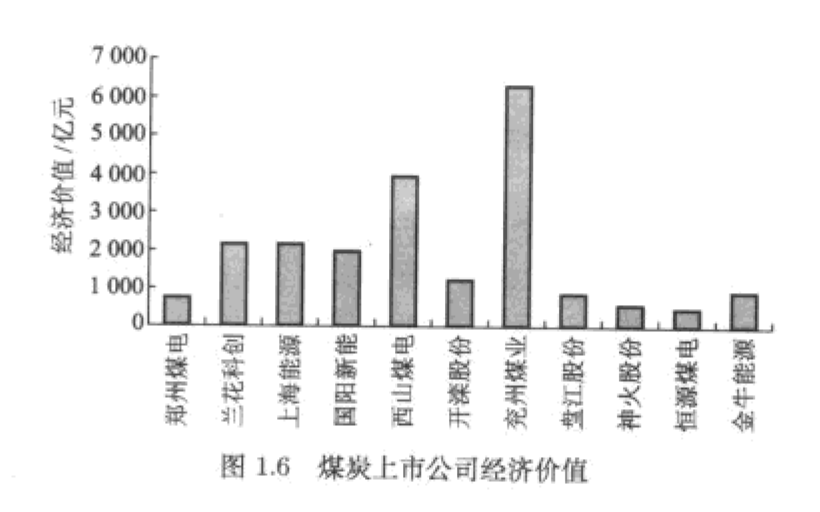


图 1.6 煤炭上市公司经济价值

我们将每股经济价值定义为

$$\text{每股经济价值} = \text{经济价值}/\text{总股本}$$

从每股经济价值来看，前 3 名分别是兰花科创、上海能源和国阳新能，每股经济价值分别为 490 元、 462 元和 363 元；排名后 3 位的分别是恒源煤电、金牛能源和郑州煤电，每股经济价值分别为 128 元、 93 元和 45 元．见图 1.7 ．我们认为，每股经济价值有助于揭示资源型上市公司的长期价值．

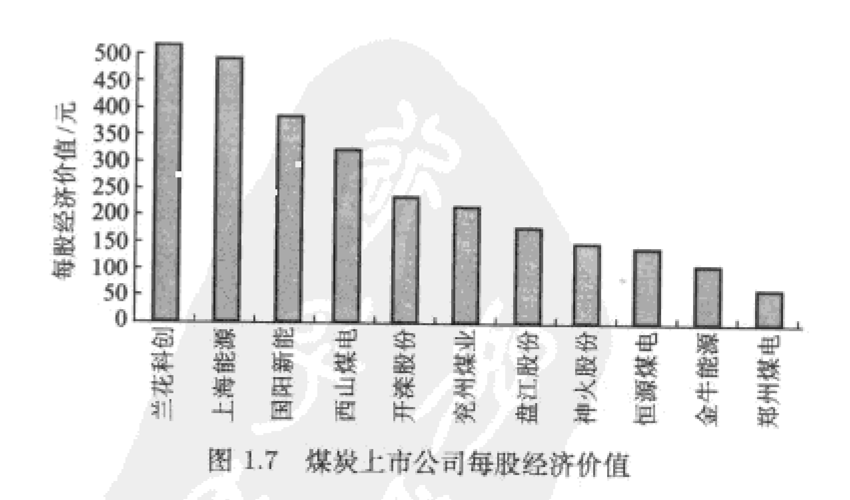


图 1.7 煤炭上市公司每股经济价值

§1.3 对估值方法使用情况的调查

当对商业企业估值时，金融分析师和公司财务人员可使用各种方法.

1. 收入方法根据公司未来所能产生的预期现金流的价值决定普通股的公允市场价值.

2. 市场方法通过比较公司与行业内类似的公开交易的公司，同时依据普通股过去的交易情况来确定该公司普通股的公允市场价值.

3. 净资产方法通过把公司资产负债表中的资产和负债调整为等价的公允市场价值，得到公司普通股的公允市场价值. 具体做法是将目标资产包含的所有单个的公允市场价值加总，再减去负债的公允市场价值.

4. 经济增加值这种剩余收入估值方法也能被运用于公司估值中.

上述估值方法已历经了许多年的发展. 市场方法在 20 世纪 30 年代甚为流行. 随着不同类型的资产需要被估值，收入方法渐受欢迎. 当前，不确定性是全球经济环境的主要特征，在管理资本投资和交易决策中运用实物期权估值 (ROV, Real Option Valuation) 成为流行的方法.

普华永道会计师事务所对企业在开展业务时如何使用估值模型进行了调查. 他们把问卷寄给金融分析师和公司财务人员，对收到的每个问题的答案进行分析，并将分析结果置于答卷的后面. 问卷包括以下几类基本问题:

1. 频率类问题: 回答者必须说明他们是总是、或经常、还是很少使用特定的方法、变量或资源. 频率类问题的目标是决定所调查的每一项内容的相对重要性，分析频率类问题时，依据的是表 1.4 .

表 1.4 频率类问题中分数的定义

值	描述
3 (总是)	测试项总是被调查者使用或考虑
2 (通常)	测试项通常被调查者使用或考虑
1 (经常)	测试项经常被调查者使用或考虑
0 (很少或从来没有)	测试项很少或从未被调查者使用或考虑

2. 选择类问题: 被调查者必须说明他们是否遵循某种步骤，被要求在两个或多个备选项之间做出选择. 选择类问题的结果以被访者总人数的百分比表示.

3. 范围类问题: 被调查者必须说明，对某一特定变量常用的价值范围是多少，被要求给出某些变量的值，如市场风险溢价. 他们可以选择给出单个值或者一个区间. 当给出的是区间时，就根据用区间和区间的中点得到的平均值或中值对数据进行分析.

首先，我们来看看企业采用的是哪些估值方法，见表 1.5 。根据调查的结果，最主要的估值方法是收入法 (即折现现金流) 和市场法 (即市盈率) 。

表 1.5 企业所采用的估值方法

估值方法 \ 年份	2000	2003
收入法	2.5	2.6
市场法	2.1	1.7
净资产法	0.8	0.8
EVA	0.9	0.8
其他	1.8	0.2

当使用收入法时，一个项目产生的预期现金流通过使用反映投资相对风险和货币时间价值的收益率折现为等价的现值。此收益率被称为加权平均资本成本，它是付息债务和普通股权资本所要求的收益率的加权平均，其中权重为估算的付息债务和普通股权资本在预期行业资本结构或其他合适结构中所占的百分比。计算加权平均资本成本 (假设仅有债务和股权资本) 的一般公式为

$$WACC = K_d \cdot d + K_e \cdot e$$

其中 $WACC$ 为所投资资本的加权平均资本成本， K_d 为债务资本的税后收益率， d 为债务资本占债务与普通股权资本之和 (总的投资资本) 的比例， K_e 为普通股权资本的收益率， e 为普通股权资本占总投资资本的百分比。

股权成本给出了投资者对投资相关的风险水平所要求的收益率的估计。两种获得广泛认同的估计股权成本的方法是资本资产定价模型 (CAPM) 和套利定价理论 (APT) 。 CAPM 估计目标公司股权投资者要求的收益率，其公式如下

$$E(R_e) = R_f + \beta E(R_p)$$

其中 $E(R_e)$ 为股权资本的预期收益率， R_f 为无风险收益率， β 为系统风险， $E(R_p)$ 为预期市场风险溢价，即包含众多股票的市场投资组合的预期收益率与无风险收益率之差。

APT 由 Stephen Ross 于 20 世纪 70 年代提出，它从另一方面来解释预期收益率。APT 根据诸如通货膨胀、行业生产和利率等多个经济因子来度量整体风险。依据 APT, 一个证券的预期均衡收益率为

$$E(R_e) = R_f + \sum_k \beta_k f_k$$

其中 $E(R_e)$ 为股权资本的预期收益率， R_f 为无风险收益率， f_k 为风险因子， β_k 为对特定风险 f_k 变化敏感性的风险溢价。

其次，我们再来了解哪些定价模型被用于估计股权成本，见表 1.6 。 2003 年的调查表明 CAPM 是估计资本成本时使用的主要方法。

表 1.6 用于估计股权成本的定价模型

模型＼年份	2003
CAPM	2.7
APT	0
其他模型	0.4

第三，如何估计市场风险溢价。本质上，市场风险溢价是基于未来的概念，它度量市场对股票收益的预期。由于市场的预期不能轻易被观察到，实际中，金融分析师和公司财务人员必须依靠来自于各方面的事实并据此对市场做出推断。这些事实的来源在不同国家会有差别。相关信息可能包括过去的市场表现、市场分析人士的预期或对基金经理的调查，见表 1.7 。

表 1.7 估计市场风险溢价的方法

方法＼年份	2000	2003
股票与债券历史收益率之差	1.3	1.7
分析师的预测	0.6	0.3
以上两种的结合	1.1	0.9
其他	0.1	0.4

第四，从表 1.5 可以看出，市场法排在收入法之后而位居第二。当运用市场法时，使用的是哪种估值倍数呢？见表 1.8 。

表 1.8 估 值 倍 数

估值倍数＼年份	2000	2003
市盈率 (PE)	2.4	2.3
市净率 (PB)	0.8	0.7
$MVIC$ 与息税、折旧及摊销前利润 ($EBITDA$) 之比	0.9	1.3
投资资本的市场价值 ($MVIC$) 与收入之比	0.5	0.2
$MVIC$ 与息税前利润 ($EBIT$) 之比	0.4	1.0
价格与税前利润 (EBT) 之比	0.3	0.2
其他	0.2	0.4

在使用市场方法时，市盈率 仍然是最常用的估值模型。此外，一个有趣的情况是， 2003 年的调查突出了如下事实： $EBITDA$ 和 $EBIT$ 的使用率明显提高。这使得在 2003 年的调查中，更多地采用现金流及与现金流相关方法的趋势得以延续。

§1.4 总结

在这一章中，我们首先讨论价值和估值的概念，然后讨论估值存在于经济生活中的方方面面，其中估值从所面对的对象和应用角度又分为以下几类：

- 金融估值；
- 商业估值；
- 与人力资源相关的估值；
- 大宗商品的估值；
- 现货估值；
- 期货和期权估值；
- 股权估值；
- 债务估值.

市场价值和公充价值在表达一个对象的价值形态时是最流行和最容易接受的．我们讨论各种流行的估值方法和模型及其在企业中使用的调研结果，并讨论了一些具有中国特色的估值问题.

本章的目的是给读者建立一个价值和估值(定价)的大致概念，说明专业人士一般是如何看待这些问题的，为下面几章的展开做一些准备.



第2章

估值的经济学原理——价值是什么?

§2.1 局部均衡和一般均衡

§2.1.1 局部均衡

对于是什么决定了商品的相对价值, 通常有两种不同的理论. 古典的理论是由亚当 · 斯密和大卫 · 李嘉图发展起来的, 新古典理论 (也称边际效用理论) 是自 1870 年以来发展起来的 (详细说明参见注记 1) . 古典理论拥护者认为商品的交换关系 (它们的价格) 是由它们的生产成本决定的. 边际理论拥护者则认为商品的交换关系是由消费最后一个商品时增加的相对效用决定的. 究竟是生产和供给决定了市场的均衡价格, 还是需求和效用决定了均衡价格呢? 马歇尔和凯恩斯 的回应是相当清晰的: 两方面的影响都有, 就像一把剑的两面刃. 马歇尔定义了三个周期内的效用理论。

1. 极短的周期: 极短的周期是指市场实际交易的周期, 市场供给是一条竖直的线, 换言之, 在这个极短的周期内, 供应的量是给定的, 价格完全取决于需求的水平. 例如, 就在华尔街看涨能源价格的热情逐渐减退之时, 2005 年 8 月 29 日, 飓风卡特里娜来了, 它把石油价格推到超过每桶 70 美元, 因为在这个极短的周期内, 供给是固定的.

2. 较短的周期: 较短的周期范围少则几天, 多则几个月, 它更严格一些的定义是公司对市场波动作出反应所需要的时间, 在这段时间内, 供给的增长对价格机制形成影响.

3. 长周期: 长周期内, 所有的公司资本和数目随需求调整, 首先, 每个商业机构有机会削减自己的成本, 长期平均成本 (LPAC, Long Period Average Cost) 曲线包含了短期平均成本 (SPAC, Short Period Average Cost), 这意味着每个竞争性的公司都有机会根据产业内的新条件最优化自己的生产技术. 其次, 过去时间内的巨额利润已经吸引了大量新资本聚集在该产业, 这意味着投资增加和新公司的成立.

注记 1 (边际效用价值论) 一件物品的价值究竟是什么意思？边际效用学派认为，价值的正式含义应当是指物对物主的重要性。有个人居住在涌泉之旁，他从持续喷涌的泉中盛满了一杯水，而这个泉源每分钟涌出的水足有一百杯之多。另有一位沙漠旅行者，已在灼热干燥的环境中走了一整天，但绿洲还遥遥未及。他的行囊中只剩最后一杯水了。现在要问，在这两个例子中，一杯水对物主的福利有无差别？答案是显而易见的：天壤之别。在这两种条件下，水本身的用途，水的解渴能力所依据的性质，如成分、味道等等，是没有什么差异的。但从价值，即水对人的影响来衡量，就截然不同了。由于泉水持续喷涌，对第一个人而言，那杯水只是无数杯水中的微小部分，并非他解渴的不可缺少的条件，所以对其影响无足轻重。但对第二个人来说，丧失那最后一杯水则意味着渴的痛苦、甚至死亡的威胁，所以这杯水对其有极其重要的作用。从这个十分简单的例子出发，边际效用学派对物品本身的用途与物品对物主的福利作了严格区分，并断言，这种区分是整个经济科学范围内最有成效和最基本的区分之一，因为它澄清了"价值"一词的真正含义。

既然价值的性质已经阐明，那么解决价值大小的问题就水到渠成了。边际效用学派认为：一件物品的价值量是由它的边际效用量决定的。所谓边际效用，就是该物品在具体经济情况下合理使用时可能产生的最小效用。庞巴维克的《资本实证论》中举了一个简单的例证：一位农民在原始森林中建造了一座小木屋，独自在那里劳动和生活。他收获了五袋谷物，这些谷物要用到来年秋天，不必留有剩余。他是一个很节俭、善于精打细算的人，因而安排了一个在一年之内使用这些谷物的计划。一袋谷物是他维持生存所必需的。第二袋是在维持生存之外用来增强体力和精力的。此外，他希望有些肉可吃，所以，留第三袋谷物来饲养鸡、鸭等家禽。他爱喝酒，但这种愿望比吃肉弱一些，于是他将第四袋谷物用于酿酒。对于第五袋，他觉得最好用它来养几只他喜欢的鹦鹉，这样可以解闷。这五袋谷物的用途不同，其重要性也是不同的。如果以数字来表示的话，那么将维持生存的那袋谷物的重要性可定为 10，其余依次定为 8, 6, 4, 1 。当然这些数字的大小是任意取的，但高低之别必然存在。现在要问的是，对这位农民来说，一袋谷物的重要性如何确定？庞巴维克认为，这个问题等于是说，如果一袋谷物遭受损失，那么他将失去多少效用。假如损失了一袋谷物，这位农民面前只有一条唯一合理的道路，即用剩下的四袋谷物供应最迫切的四类需要，而放弃最不重要的需要，或者说，放弃边际效用。在这里，当然是指放弃饲养鹦鹉。"因此，他有没有第五袋谷物，对他的福利而言，唯一的差别只是，有这第五袋他就可以容许自己得到养鹦鹉的快乐，失去了它，他就不能得到这种满足。从而，他将正确地按照这一不重要的效用，对他所有的各袋谷物作出评价。"这就是说，在这位农民拥有五袋谷物时，所谓一袋谷

物的价值，对他来说就是饲养几只鹦鹉所得到的快乐，也就是他的边际效用。"

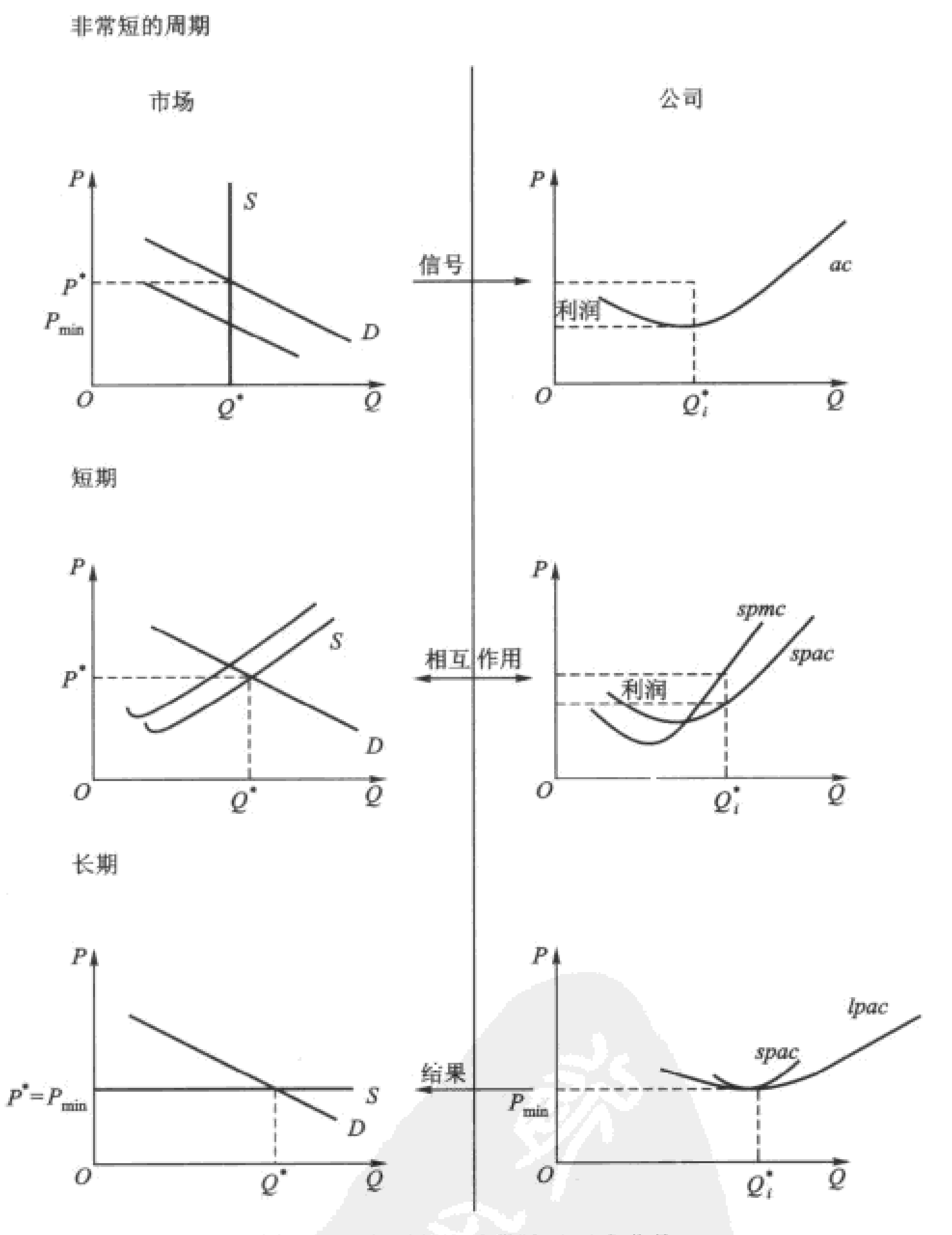


图 2.1　三个周期内的供给和需求曲线

注：Q 表示产量；Q^* 表示均衡产量；P 表示价格；P^* 表示均衡价格；ac 表示平均成本；$spac$ 表示短期平均成本；$spmc$ 表示短期边际成本；$lpac$ 表示长期平均成本；P_{min} 表示价格对于平均成本曲线的反应；Q_i 表示公司 i 提供的产量；Q_i^* 表示均衡时 i 的产量；S 表示供给；D 表示需求。

马歇尔的定价原理是非常直观的：短期内，消费偏好决定价格；长期内，

生产成本决定价格. 边际效用理论解决了短周期内的定价问题，而生产理论解决了长期的定价问题，参见示意图 2.1 . 在接下来的章节，我们将看到从基于生产的方法和边际效用理论的观点出发，如何决定价格.

马歇尔的这个分析故意忽略了一个市场和其他市场的互动，这种方式叫局部均衡 (Partial Equilibrium) . 换言之，他假设了其他所有的条件都是相同的.

一般均衡 (General Equilibrium) 研究方法是由法国人里昂 · 瓦尔拉斯 (1834—1910) 在 1874 年提出的，该方法强调市场间的互相依赖性. 我们接下来详细讨论一般均衡.

§2.1.2　一般均衡

一般均衡理论从市场间的相互联系开始. 一个市场供给和需求主导的条件 (Prevailing Conditions) 和其他市场上主导的条件不是独立的. 我们强调主导的条件是因为在某些时刻，这些市场处于不均衡状态 (需求大于供给或供给大于需求) 和处于均衡状态一样容易. 我们从两个方面来考察市场间的相互联系. 首先我们观察商品的替代性 (Substitutability) 和互补性 (Complementarity) . 替代品可以互相取代市场对于对方的需求，尽管可能不能完全取代. 某种商品的价格同市场对其替代品需求正向变动. 例如，苹果市场上的主导条件依赖于香蕉市场，因为香蕉的价格运动可能引导人们去买更多或更少的苹果. 对于互补品，一种商品的需求与另外一种商品的价格反向变化，汽车市场和汽车零配件市场就有这样的联系.

在边际效用理论拥护者中间，瓦尔拉斯 有一个明显的优点是强调市场间的互相联系. 对于 n 种不同的商品，存在 n 个不同的市场，它们都有各自的供给和需求函数. 每个函数都是由不同经济人的行为模式的累加决定的，而且依赖于商品的不同价格 (即是由不同市场间主导条件的相互联系决定的) . n 种产品的超额需求 E(需求 E 和供给 D 之间的差额) 表示如下：

$$\begin{aligned} E_i(p_1,\cdots,p_k,\cdots,p_n) =& D_i(p_1,\cdots,p_k,\cdots,p_n)- \\ & S_i(p_1,\cdots,p_k,\cdots,p_n),\quad i=1,\cdots,n \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

这 n 个值描述了经济系统中这些不同市场上的主导条件. 在某些市场上 $(i=1,2,\cdots,g)$, 超额需求水平是正的，意味着需求量大于能满足要求的商品供给量，在其他的市场上 $(i=g+1,g+2,\cdots,n)$, 超额需求水平是负的，意味着可以销售的商品大于购买的需求.

数学意义上，通过把所有市场上的个体交易相加，如果我们知道其他 $n-1$ 个市场的交易，我们就可以推出第 n 个市场上的交易． $n-1$ 个市场上的主导条件决定了第 n 个市场上的主导条件．这个原理称为瓦尔拉斯法则．瓦尔拉斯法则允许我们在经济均衡的研究中减少 n 个超额需求函数中的某一个．

但是，什么是均衡呢？经济学家眼中的均衡原理是指经济代理人期望的出清标准．事实上一旦他们计算出各自对商品的供给和需求，没有任何期望的交易不能成交．因此，一个瓦尔拉斯式均衡会假定每个需求的情形都能由对应的供给满足 ①．

在瓦尔拉斯均衡中，各个经济部门都存在着一个价格向量 $(p_1^*, \cdots, p_n^*)$，使得所有超额需求都不复存在．为了解决这个问题，我们可以和瓦尔拉斯一起去琢磨，假定其中的某一个商品是其他所有商品价值的度量单位．我们可以用这个商品为单位去衡量其他商品的交换价值．例如，可以将一个世界里所有商品的价格都表示成羊的数量，一头牛值两只羊，一只鸡值 0.2 只羊等等．一个商品被转换成价值标准或者说计价单位 (瓦尔拉斯当年用法文 numeraire 表示)，这个计价单位被定义为 1(一只羊就值一只羊)．只要确定了一种商品的价值，其他 $n-1$ 种商品就由 $n-1$ 个相互联系的方程将交换关系表示出来．这样就得出了一个解．

假定有两个商品，其供给量为 e_1 和 e_2，价格为 P_1 和 P_2，则总供给为

$$S = P_1 e_1 + P_2 e_2 \tag{2.1.2}$$

设对这个商品的需求量为 x_1,x_2，则总需求为

$$D = P_1 x_1 + P_2 x_2$$

当市场处于均衡状态时，我们有

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 = D = S$$

设经济人对这个商品的效用函数为 $u(x_1, x_2)$，则最优的需求量为

$$\max_{x_1, x_2}\{u(x_1, x_2)\} \tag{2.1.3}$$

满足

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 = S \tag{2.1.4}$$

① 也有人认为考虑到富余的商品价格跌到 0，而且不能被扔掉的情形，瓦尔拉斯等式应该写成不等式的形式．

采用拉格朗日方法，我们得到

$$Mu_1(x_1, x_2) = \lambda P_1 \tag{2.1.5}$$

和

$$Mu_2(x_1, x_2) = \lambda P_2 \tag{2.1.6}$$

其中 λ 为拉格朗日乘数， $Mu_i(x_1, x_2), i = 1, 2$, 为边际效用函数，

$$Mu_i = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_i} \tag{2.1.7}$$

将以上两式相除，我们得到两个商品的相对价值方程

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{Mu_1}{Mu_2} = MRS \tag{2.1.8}$$

其中 MRS 称为商品的边际替代率 (Marginal Ratio of Substitution) 。

在今后的讨论中，我们将会发现，无论何种复杂情形，定价方程均是以上形式的变种.

注记 2 (英国战俘和法国战俘的茶和咖啡的交易及其定价机制) 英国经济学家 Radford 曾经有一个迫不得已的机会从内部研究了在德国和意大利的战俘集中营的经济机制，他发现在集中营里存在高度活跃的市场. 通常香烟在其中充当了物价计算时的计价单位 (或者说标准商品)，一杯咖啡约值两根香烟，一件 T 恤可能值 80 根香烟，一件外套的洗衣费为两根香烟等等. 香烟扮演了计价单位的角色，也就是说香烟就是战俘营中的货币. 在英国战俘生活的区域里，茶明显比咖啡受欢迎，在法国战俘生活的区域里，咖啡又比茶受欢迎. 一个有秩序的地下交易允许各个区域的战俘以一个价格比例来调节他们的消费，这反映了集中营内部整体的供给和需求平衡.

为简单计，设英国和法国对茶和咖啡的效用函数为可加式的，即

$$u^{英国}(c,t) = u^{英国咖啡}(c) + u^{英国茶}(t) \tag{2.1.9}$$

和

$$u^{法国}(c,t) = u^{法国咖啡}(c) + u^{法国茶}(t) \tag{2.1.10}$$

由于英国人偏好茶，我们会有

$$u^{法国茶}(t) < u^{英国茶}(t) \tag{2.1.11}$$

但法国人偏好咖啡，我们会有

$$u^{\text{法国咖啡}}(c) > u^{\text{英国咖啡}}(c) \tag{2.1.12}$$

见图 2.2，这些偏好并不能影响在英国人之间、法国人之间以及英国人与法国人之间形成一个共同的以烟为计价单位的茶的价格 P_t 和咖啡的价格 P_c。它满足相同的边际替代率，即

$$MRS^{\text{英国}} = \frac{P_t}{P_c} = MRS^{\text{法国}} \tag{2.1.13}$$

其中

$$MRS^{\text{英国}} = \frac{Mu^{\text{英国茶}}(t_{\text{英国}})}{Mu^{\text{英国咖啡}}(c_{\text{英国}})} \tag{2.1.14}$$

和

$$MRS^{\text{法国}} = \frac{Mu^{\text{法国茶}}(t_{\text{法国}})}{Mu^{\text{法国咖啡}}(c_{\text{法国}})} \tag{2.1.15}$$

假定 $P_t/P_c = 2$，则说明法国人和英国人均同意茶的边际效用是咖啡的边际效用的 2 倍，即

$$Mu^{\text{英国茶}}(t_{\text{英国}}) = 2Mu^{\text{英国咖啡}}(c_{\text{英国}}) \tag{2.1.16}$$

和

$$Mu^{\text{法国茶}}(t_{\text{法国}}) = 2Mu^{\text{法国咖啡}}(c_{\text{法国}}) \tag{2.1.17}$$

这时，$t_{\text{法国}} < t_{\text{英国}}$ 且 $c_{\text{法国}} > c_{\text{英国}}$。它说明在形成定价过程中，偏好和边际效用的绝对大小 (见图 2.2 和图 2.3) 并不是关键因素，关键因素是两个商品的边际效用之比的大小。我们可以采用茶和咖啡交换的艾奇沃斯箱图 2.4 来描述这种交换，图 2.4 展示了典型的法国人和英国人的情形，有效的地下交易使得两个区域的价格相当，所以咖啡和茶的比价 P_c/P_t 在两组犯人中一直是相等的。对于英国犯人来讲，切点 $C(MRS_c = P_c/P_t)$ 完全倾向茶对应的轴线；而对于法国犯人来讲，最优的 C 靠近咖啡的轴线。

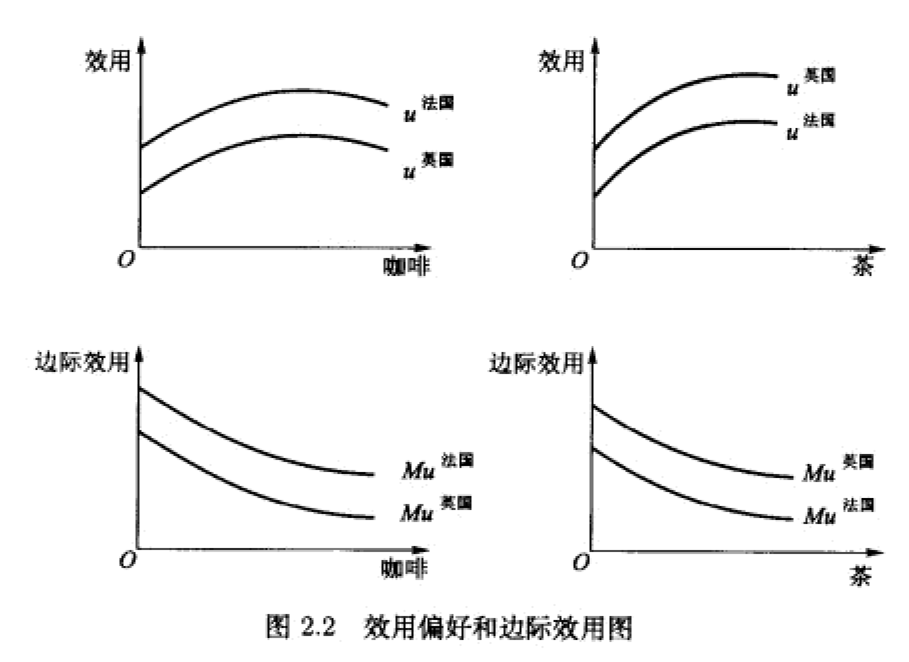


图 2.2 效用偏好和边际效用图

商品 / 经济人	咖啡	茶
英国战俘	$Mu^{英国咖啡}$	$Mu^{英国茶}$
法国战俘	$Mu^{法国咖啡}$	$Mu^{法国茶}$

交换的比例=P_c/P_t

图 2.3 以烟为计价单位的茶的价格 P_t 和咖啡的价格 P_c 图

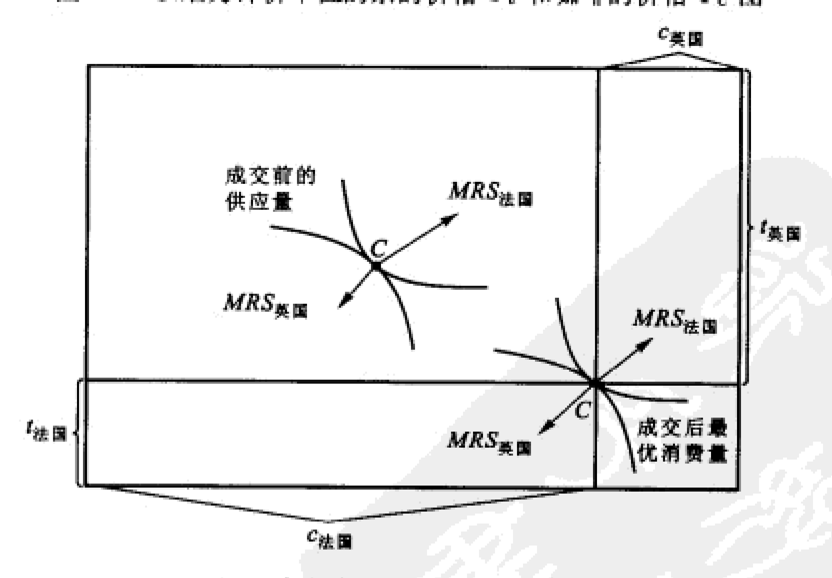


图 2.4 茶和咖啡交换的艾奇沃斯箱图

§2.2　确定性条件下的估值

§2.2.1　只有单个代理人并且没有交换的单种商品经济

假定只有一个个体，他就像鲁滨逊 · 克鲁索 (Robinson Crusoe) 一样被遗留在一个荒岛上，而且他生活在一个单期经济中，即现在是 $t=1$，将来是 $t=2$ 。他独自一人意味着没有任何人和他交易．假定他具有某一种商品的禀赋：在 $t=1$ 时刻为 w_1，在 $t=2$ 时刻为 w_2，且 w_1 能完全地被保存至 $t=2$ 。因此一个简单的消费问题就出现了，他如何安排在 $t=1$ 时刻的消费 c_1 和 $t=2$ 时刻的消费 c_2 。显然他具有以下消费约束：

$$c_2 \leqslant w_2 + w_1 - c_1 \text{ 或 } c_1 + c_2 \leqslant w_1 + w_2 \tag{2.2.1}$$

其中 $0 \leqslant c_1 \leqslant w_1$ 且 $0 \leqslant c_2 \leqslant w_1 + w_2$ 。可行消费域如图 2.5 所示。

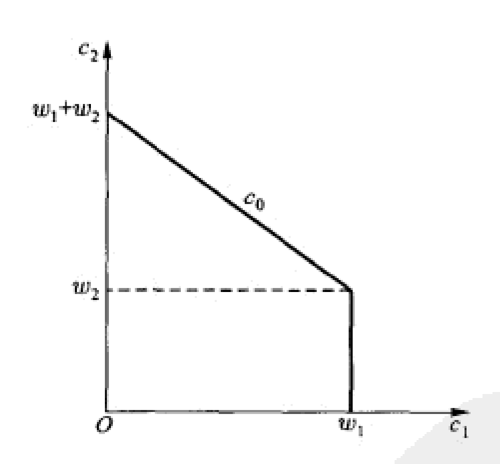


图 2.5　鲁滨逊经济中的可行消费域

我们假定消费的时间偏好能被定义在 $\mathbf{R}_+^2$ 上的效用函数 $u(c_1,c_2)$ 完全概括，而且问题的解通过前述约束条件下的效用最大化得出．我们需要对效用函数给出几个假设：

1. 效用函数 $u(c_1,c_2)$ 连续而且在两个变量上两阶可微．

2. 效用函数 是消费的增函数而且边际增长率递减。也就是说一阶导数 u_1' 和 u_2' 是正的，二阶导数 u_{11}'' 和 u_{22}'' 是负的，因此，若给定当前的消费水平 c_1，

在消费的可行域内对 c_2 最大化 $u(c_1,c_2)$，最大值必然出现在边界上，即

$$c_2^* = c_0 = w_2 + w_1 - c_1 \tag{2.2.2}$$

这意味着在 $t=2$ 时刻没有任何资源被浪费．他必须消费掉任何可以消费的资源 $w_2 + w_1 - c_1$ ．

3. 然而当前消费 c_1 依然是未知的。给定效用函数 u，如果我们能确定 c_1，则最优的未来消费 c_2 也确定了．令

$$\tilde{u}(c_1) = u(c_1, c_2^*) = u(c_1, w_2 + w_1 - c_1)$$

我们进一步假设 $\tilde{u}(c_1)$ 对于 c_1 是严格的凹函数。由于 $\mathrm{d}\tilde{u}/\mathrm{d}c_1 = u_1 - u_2$，在边界线上存在一个最优的当前消费 c_1，使得最大的效用 u 满足：

$$u_1'(c_1^*, w_2 + w_1 - c_1^*) = u_2'(c_1^*, w_2 + w_1 - c_1^*) \tag{2.2.3}$$

$u(c_1^*, c_2^*)$ 是他能够获得的最大的效用，是不可能被超越的．然后在下文中我们将会看到，在一个生产经济或者是具有资本市场的经济中，我们还能增进这个最大效用．利率在其中发挥重要的作用．

§2.2.2 有生产或投资机会但没有交换的单种商品和单个代理人经济

现在假定鲁滨逊 · 克鲁索有某种途径进行该商品的生产性投资[①]，该投资在将来具有非负的收益．对于任意增加的边际投资 (边际生产率 , Marginal Production Ratio) 而言， $\psi(I)$ 表示非负的边际收益．假定在 $t=1$ 时刻，他消费了 c_1，并且投资了 $w_1 - c_1$，故在 $t=2$ 时刻，他总共的消费数量可以是

$$c_p = w_2 + \int_0^{w_1 - c_1} (1 + \psi(I))\mathrm{d}I \tag{2.2.4}$$

$$= w_2 + (w_1 - c_1) + \int_0^{w_1 - c_1} \psi(I)\mathrm{d}I \geqslant c_0 \tag{2.2.5}$$

其中 c_0 由 (2.2.2) 式给定。换而言之，我们可以将消费水平 c_0 提升至更高的消费水平线 c_p ．图 2.6 描述了这种情况．如果我们考虑一个纯生产的经济，在 $t=1$ 我们有产出 $w_1 = y_1 = F(I_0)$，如果我们在 $t=1$ 时刻消费 c_1，并且投资

① 在实体经济中，人们将其视为投资．在接下来的章节，我们讨论资本市场的投资而不是实体经济的投资．

$w_1 - c_1$, 故在 $t = 2$ 时刻的产出是 $w_2 = y_2 = F(I_1) = \int_0^{w_1-c_1}(1+\psi(I))\mathrm{d}I = (w_1 - c_1) + \int_0^{w_1-c_1}\psi(I)\mathrm{d}I$. 这说明了 $\mathrm{d}y_2/\mathrm{d}I = \psi(I)$, 也就是说 $\psi(I)$ 就是边际生产率.

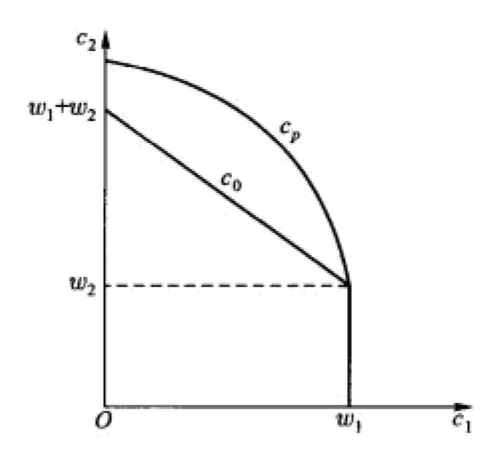


图 2.6 具有生产或投资机会鲁滨逊经济的可行消费域

如果我们在 $t = 1$ 时刻消费 c_1, 并且投资 $w_1 - c_1$, 因此在 $t = 2$ 时刻可供消费的量 $c_2 = c_p$, 见 (2.2.5) 式. 因而

$$\max_{0\leqslant c_1\leqslant w_1, 0\leqslant c_2\leqslant c_p}\{u(c_1, c_2)\} = \max_{0\leqslant c_1\leqslant w_1}\{u(c_1, c_p)\}$$

一阶微分条件是

$$u_1' - u_2'(1+\psi(I)) = 0\text{或者}\psi(I) = u_1'/u_2' - 1 \tag{2.2.6}$$

换而言之, 边际生产率 等于边际替代率减去 1 。

§2.2.3 有资本市场的单种商品和多个代理人的交换经济

现在除了鲁滨逊 · 克鲁索, 我们假定还存在其他的许多经济代理人一起组成了一个资本市场, 在资本市场上每个代理人都可以借入或贷出某种商品, 比如在 $t = 1$ 时刻从其他代理人那里借入 L,并且以利率 r 在 $t = 2$ 时刻返还 $L(1+r)$. 在 $t = 1$ 时刻, 鲁滨逊 · 克鲁索最多能借出的量为 w_1, 那样意味着在 $t = 1$ 时刻他什么都不消费, 并且在 $t = 2$ 时刻获得投资回报 $w_1(1+r)$, 因此在 $t = 2$ 时刻他可供消费的量就是 $w_2 + w_1(1+r)$. 或者, 既然他在 $t = 2$ 时刻会得到禀赋 w_2, 在 $t = 1$ 时刻, 他最大可以借入的量为 $w_2/(1+r)$. 这种方式意味着他可以在 $t = 1$ 时刻最大消费 $w_1 + w_2/(1+r)$, 在 $t = 2$ 时刻什么也不消费. 假定 $t = 1$

时刻的消费为 c_1, 并且在 $t=1$ 时刻投资 w_1-c_1, 则在 $t=2$ 时刻可供消费的量由下式给出:

$$c_r = w_2 + (w_1 - c_1)(1+r) \tag{2.2.7}$$

图 2.7 展示了这种情形. 因而

$$\max_{0\leqslant c_1\leqslant w_1, 0\leqslant c_2\leqslant c_r}\{u(c_1,c_2)\} = \max_{0\leqslant c_1\leqslant w_1}\{u(c_1,c_r)\}$$

一阶微分条件是

$$u_1' - u_2'(1+r) = 0 \text{ 或等价地 } r = u_1'/u_2' - 1 = MRS - 1 \tag{2.2.8}$$

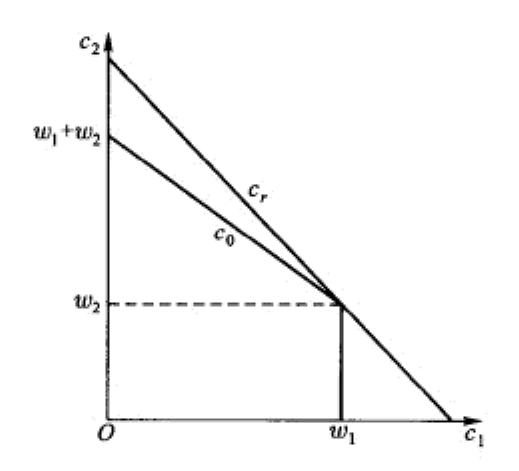


图 2.7 具有资本市场中投资机会鲁滨逊经济的可行消费域

换而言之, 尽管消费者的偏好是个体行为, 但他们在资本市场上的边际替代率 (MRS_i 表示第 i 个代理人的 MRS) 一定是相等的, 即

$$MRS_i = MRS_j = 1+r, \quad \text{对于 } i \neq j \tag{2.2.9}$$

否则, 就会存在套利机会. 我们将学习资本市场上这种最重要的性质.

§2.2.4 有资本市场和投资机会的单种商品和多个代理人经济

现在我们考虑既有资本市场又有生产经济的经济系统, 我们定义代理人的财富如下式:

$$w^1 = w_1 + \frac{w_2}{1+r}, \ w^2 = c_1 + \frac{c_p}{1+r}, \ w^3 = c_1 + \frac{c_r}{1+r} \tag{2.2.10}$$

首先，通过 (2.2.7) 式，我们得到

$$w^3 = c_1 + \frac{c_r}{1+r} = w_1 + \frac{w_2}{1+r} = w^1$$

其次，我们注意到，在一个既有生产又有资本市场的经济中，假定相同的初始消费 c_1，我们必定拥有相同的终端消费 $c_p = c_r$，否则代理人将投资于生产或资本市场．因而我们得到了一条财富线

$$w = w_1 + \frac{w_2}{1+r} = c_1 + \frac{c_p}{1+r} = c_1 + \frac{c_r}{1+r} \tag{2.2.11}$$

第三，既然 $c_p = w_2 + \int_0^{w_1-c_1}(1+\psi(I))\mathrm{d}I$ 且 $c_r = w_2 + (w_1 - c_1)(1+r)$，显而易见：

$$\psi(I) = r \tag{2.2.12}$$

或者等价地，我们得到边际生产率 = 投资机会成本．这样就得到了著名的 Fisher 分离定理．仅仅通过财富线 (2.2.11) 式，我们就能分别作出生产决策和消费决策．

Fisher 分离定理　给定完美且完全 (Prefect and Complete) 的资本市场，公司的生产决策由其利润最大化目标 (最大化生产的现值) 决定，而与和效用函数相关的最优消费决策无关．资本市场将自动调节直至 $MPR = MRS$ ．图 2.8 展示了所有禀赋都来自于生产 $w_1 = y_1$，$w_2 = y_2$，且存在一个资本市场的生产经济．

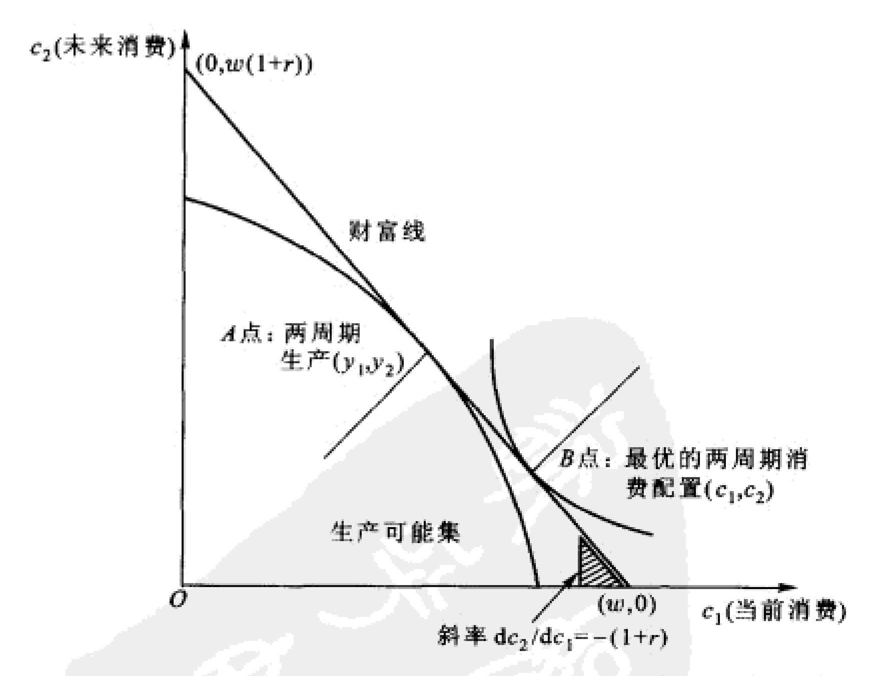


图 2.8　存在生产投资和资本投资机会的鲁滨逊 · 克鲁索经济系统中的可行消费域

§2.3 托宾的 Q 理论：一个引论

理论上，股票价格的变化意味着公司投资所需募集的股权资本成本的变化。托宾 (1969) 提出的 Q 理论在理论上描述了股票价格的波动是如何影响投资的。例如，当股票的价格相对于公司的盈利较低的时候，公司就认为当前的股权资本成本比较高，因此公司就会减少投资项目，即使这些项目在当前看起来是有利可图的。

根据托宾的 Q 理论，只有一项投资的市场价值超过该投资的重置成本，公司才会进行该项目的投资。边际的 Q 值 定义为新增资本存量 (投资) 所引起的公司市场价值的变化量与该新增资本存量的重置成本的比值。若 Q 值大于 1，即市场价格相对于公司资产重置成本较高，则新的工厂和装备成本相对公司的市场价值就会比较便宜，公司就会以相对于设备的购置成本较高的价格发行股票。在此情形下，投资花费会上升，因为公司发行少量的股票就可以买回较多的投资商品。

尽管实际的 Q 值是观察不到的，平均的 Q 值 可以用市场价格和资本的重置成本的比率来表示。 Hayashi (1982) 证明了在一定条件下，平均的 Q 值等于边际的 Q 值。因此，绝大多数实证分析使用了平均的 Q 值，并且把公司的股票价值当成市场价值。股票价格的上涨使得公司用募集资金进行投资更加划算，因为每一份股票可以募集更多的资金。因此股票价格的上涨降低了资本成本，同时刺激了投资。在 Q 理论中，没有其他的变量需要用来解释投资，因为所有的期望，包括未来收入都反映在股票价格中。因此投资的方程可以写成 (参见 Bond 和 Cummins (2001))：

$$\frac{I_t}{K_t} = a + \frac{1}{b}\left(\frac{V_t}{(1-\delta)p_t^K K_{t-1}} - 1\right) = a + \frac{1}{b}Q_t$$

其中 a 和 b 是与投资的调整成本相关的参数； I_t/K_t 是投资比例； V_t 是公司的基本价值，通过对现有股权的现金流折现得到的； $(1-\delta)p_t^K K_{t-1}$ 表示的是公司在 t 时期从上一期存续下来的资产重置成本。如前所述， V_t 用公司当前的股票价格来衡量。

该理论假定了股票市场是强有效的，意味着公司的基本价值可由其在股票市场上的价值来衡量。因此股票价格应该反映了通过现金流折现的公司价值，

并且包含了所有公司相关的信息．给定此假设，估计公司投资唯一所需估计的信息就是 Q 值．既然有关财务结构或者关于公司未来收入的期望都是已知的，这些信息都应该反映在股票的价格中[①]．

然而通过多元回归进行的实证研究几乎全都表明：股票的价格不会对公司的投资造成影响．例如，Tease 归纳道：当投资的其他变量确定后，对于七大工业国 (G7) 中任何一个国家，股票价格都不能解释投资的波动 (参见 Tease (1993), 第 58 页)． Blanchard(1993) 和 Morck (1990) 等人考察了股票价格对投资的效应后，一样做出了类似的结论．尽管 (非住宅) 投资支出依然难以解释，其他核心因素的相对重要性被不同的研究予以确认． Chirinko (1993) 总结道， "……当资本的使用者成本效应不显著时，产出 (或者销售) 明显是投资支出的决定性变量"，而且 "Q 理论在实证中令人失望的表现使得其有效性遭到质疑"．

有些研究者把 Q 理论在实证中令人失望的表现归结于股票价格不能很好地体现公司基本价值，因为市场可能不是有效的．存在一些理由说明为何经理人估计的公司价值与市场估计的公司价值不同．

1. 市场上信息不够充分．

2. 就算信息是一样的，市场可能以它们自己的方式评估资产，而且资产价格可能包含理性投机泡沫．

3. 市场狂热导致市场对资产的估值长期偏离其基本价值．

§2.4 风险 (Risk) 和不确定性 (Uncertainty)

§2.4.1 风险的概念和不确定性的概念

Georgescu Roegen (1958) 清楚地总结了凯恩斯对于不确定性的主要观点．现在让我们来考虑四个事件，分别用 e_1 到 e_4 表示，考虑四个分开的盒子，从 A_1 到 A_4 ．每个盒子装了一些白球和黑球．

事件 1:$e_1=A_1$ 中的球，有 2/3 是白球， 1/3 是黑球．

事件 2:$e_2=$ 从 A_2 中相互独立地取球 3 426 次，其中 2/3 是白球．

事件 3:$e_3=$ 从 A_3 中相互独立地取球 3 次，其中 2 次是白球， 1 次是黑球．

事件 4:$e_4=A_4$ 中装了一些球．

① 这意味着公司财务结构和未来收入期望的信息都反映在公司的 Q 值中，这些信息对于公司的资产负债表和信心引导 (Confidence Channels) 都至关重要．

显然，在前两次事件 e_1 和 e_2 中，取球的人处于一种有风险 的条件下．一个人在每次取球前都去猜球的颜色，取出的球的颜色完全是偶然确定的．但是机会大小可以通过概率来计算， e_1 中取出白球的概率显然是 2/3, e_2 中几千次的尝试也可以让我们确信 e_2 中取出白球的概率几乎等于 e_1 中的概率： 2/3．

另一方面，在事件 e_3 和 e_4 中，我们面临一种不确定性 的境地，运用概率去估计取出白球的机会是有争议的， e_3 的信息比 e_4 丰富，但还不够，三次取样不足以对下一次样本的估计建立较高的置信度．

一般情况下，真实世界尤其是凯恩斯的经济学世界，更接近于 e_4 而不是 e_1，事实上， e_1 更像是典型的实验室内设计的环境条件而不是真实世界的环境条件．因为在实验室里，对所有条件可以进行特定的构造．而 e_2 至 e_4 表示了每天生活的环境．有时候我们似乎不断得到高度可信的关于样本的信息，但更多的时候，由于数据的缺乏 (如 e_3), 甚至完全没有机会来让我们对真实世界做出有效的推测 (如 e_4)．

这些区别让凯恩斯对传统的有关概率的观点 (频率主义者 的立场) 进行了辩驳．频率主义者认为，概率是从对一个事件的不断观察和它的数学频率的计算中得到的．然而，绝大多数时候，每天的生活不允许我们用严格的大量重复实验数据去计算概率．因此，即使前文的事件 e_2, 绝大多数时候也是难以做到的．但是凯恩斯并不是试图去说明那种计算概率的方法无效，而是试图澄清概率理论中两个有本质区别的概念：*概率*(Probability) 和*置信度*(Degree of Confidence)．

我们一起考察前三个盒子的例子中取球的人的行为，其中分别可以利用的信息是 e_1, e_2 和 e_3．取球者估计的取出白球的概率并没有变化，每种情形下都是 2/3．然而每种情形下的置信度却大不一样，在 e_1 中，概率计算的置信度是 1；在 e_2 中，概率计算的置信度是很高的；然而在 e_3 中，概率计算的置信度却非常低．换而言之，依据实验，尽管推测的概率并没有变化，但推测出的结论置信度却大相迥异．

凯恩斯点出了以下差别，术语概率描述了一阶的可能性，也就是说它是直接从观察资料中得到的．一个新的观察数据就可能增加或减少我们对该事件发生概率的估计．相反，术语置信度用来表示二阶的可能性．两个事件之间因果关系的置信度总是随着可用信息的增多而增加，结论是，置信度总是随着观察次数的增多而增大．

置信度和概率的区别有助于理清风险和不确定性之间的关系．在 e_1 中，猜中取出的球的颜色有风险，但并不是不确定的，概率计算的置信度因而达到最

大 (即为 1) . 在 e_3 中，置信度是很低的 (接近于 0), 概率的计算具有高度的不确定性。

在投资世界中，人们常常听说 "投资存在风险","某种投资的风险相对较低", "分散化你的投资组合可以降低风险 ","不要把所有的鸡蛋放在同一个篮子里" . 类似的声明强调风险的观念，但风险的准确定义以及如何度量风险依然是不清楚的. 人们似乎感觉到风险意味着什么，但是，如果被问到如何度量风险，或者如向对一系列投资机会按风险排序，很难有一致的答案. 数学上，我们定义一个经济事件的结果，例如资产 (Asset) 或负债 (Liability) 的价值，是一个随机变量 (向量)X . X 可以在集合 $S=\{x_1,\cdots,x_N\}$ 中取离散值，或在实数集 $(-\infty,\infty)$ 的子集 S 中取连续值. 我们称 S 为结果空间或状态空间. 令 $p(x)$ 为定义在 S 上的概率分布。 Frank Knight 定义 (X,p) 为 风险，其中 p 的函数形式已知。例如， p 是一个二项分布或者正态分布. 他定义 (X,p) 为不确定性，其中 p 的形式是未知的。

例 2.4.1 中国航油在石油衍生产品交易中损失了至少 5.5 亿美元

中国一家国有控股航空燃油供应商的海外子公司在石油衍生产品交易中损失了至少 5.5 亿美元，这一丑闻让人们再度质疑中国企业的公司治理问题，国有企业作为商业实体运营的潜在风险更是引人瞩目.

新加坡和中国的两家国有公司联合提出了对中国航油 (新加坡) 股份有限公司 (China Aviation Oil Corporation Limited., 简称中国航油) 的补救方案，中国航油是中国航空油料集团公司 (China Aviation Oil Holding Company) 的新加坡上市子公司. 该公司在过去几个月押注油价下跌酿成巨错，并且交易额远远超出了公司的内部限额 —— 如果全公司交易亏损额超过 500 万美元，应通知公司高级管理层并停止交易.

该公司坦然承认对石油衍生工具进行了投机，这是多年来亏损数额最大的一笔衍生交易. 大概十年前，巴林银行 (Barings Bank) 新加坡分行的一位交易员隐瞒了金额最终超过 13 亿美元的亏损交易，并直接导致了巴林银行的倒闭.

中国航油的问题似乎从它 2004 年初开始涉足衍生品交易时就埋下了伏笔，当时他们估计油价会下跌，或者至少不会再涨了. 在原油价格每桶 35 ~ 39 美元时，该公司基于这种预期开始作空. 而它的交易对手大多是银行，它们当中有许多家银行都对从中国航油购买的期权产品作了对冲交易，将风险分散到市场上，相应地，在中国航油遭受巨额亏损的时候，它们并不会因此而大发横财.

例 2.4.2 债务抵押债券 (CDO, Collateralized Debt Obligations) 所附带的风险

美联储 (Fed) 一位高级官员警告说，在匆忙进入结构化信贷市场的投资者中，有一小部分可能不完全理解债务抵押债券 (CDO) 和其他复杂金融产品所附带的风险．他说，在债务抵押债券市场近期快速扩张之后，如果信贷周期突然恶化，包括对冲基金、银行和保险公司在内的投资者可能面临巨额意外损失．这位官员是美联储交易风险分析处主任迈克尔 · 吉布森 (Michael Gibson) ．他在法国尼斯的一个行业大会上发言时警告说："我们从市场参与者那里听到的是，少数债务抵押债券投资者 (也许有 10%) 没有真正理解自己投资的是什么。" 这一市场近两年出现爆炸式增长， 2004 年约有 1 200 亿美元的债务抵押债券发行并出售给投资者．虽然吉布森先生并不是以官方身份发表上述看法，但他做出这番评论的同时，国际监管机构正在努力确定债务抵押债券市场是否会给金融系统带来新的风险．债务抵押债券是新产品，尚未经历过持续的经济低迷时期．一些行业参与者也表达了这种不安的感觉．他们指出，越来越多的对冲基金正进入债务抵押债券市场，试图为它们日益庞大的资金找到一个投资目标．债务抵押债券咨询顾问特里 · 杜洪 (Terri Duhon) 说："现在市场对结构化信贷产品有些盲目乐观．我们必须问问，这个市场是否存在非理性繁荣。" 对冲基金普莱特尼 (Prytania) 的查尔斯 · 帕杜 (Charles Pardue) 也持这一观点："有人正投资于他们不了解的东西，这是件可怕的事."

§2.4.2 风险度量

在金融投资和风险资产管理中，人们需要借助事先定义好的风险度量指标来衡量风险资产可能带来的未来损失．因此，风险度量是对未来风险损失大小的度量．例如，在收益分布对称情况下可以选择标准差 (方差) 作为风险度量．当收益分布非对称时，需要采用下方差 (下方标准差) 、 VaR 或尾部风险价值 (Tail Value at Risk) 等下方风险损失函数作为风险度量指标． VaR 风险度量值还可以理解为对所承担风险要求的风险资本准备，下方风险损失越大，对应的风险资本准备就会越多．

在实际中我们更加关注的是定义风险度量的过程而不是结果，即风险度量是对风险的科学描述和表达．例如，风险度量通常要满足次可加性，否则风险的组合管理就失去了意义．但是 VaR 只有在正态分布假定下才满足次可加性，在一般分布下不具有次可加性．同时 VaR 没有考虑分布函数尾部的极端值，因此

一直以来人们渴望找到一个更合适的风险度量指标来替代 VaR .

Artzner (1997, 1999) 首次给出利用公理化体系来定义风险度量的方法. 当风险度量满足次可加性、正齐次性、单调性、无风险变换性时, 则称之为相容风险度量 (Coherent Risk Measure) . 不满足这些性质的风险度量与风险分配方式, 其得出的分配结果将会有悖于基本的投资原则.

Artzner(1999) 讨论了风险度量公理化体系中需要满足的性质和构造风险度量的原则. Denault(2001) 从博弈论的角度给出了相容风险度量与风险分配之间的联系. 他们试图将风险度量与风险分配的定义建立在一组与实际投资理念相符的公理之上. 根据 Yaari(1987) 给出的对偶理论中的组合选择问题, Wang(1996) 利用扭曲函数得到构造风险度量 (Distortion Risk Measures) 的一般方法, 并将其转化为满足一系列公理性质的风险度量定义. 凹的扭曲函数对应的风险度量 (Concave Distortion Risk Measures) 都是相容风险度量, 反之则不然.

然而, 过去几年中相容风险度量并没有引起人们的广泛关注. 在很多情况下, 人们只是在没有给出风险的准确定义情况下来讨论与风险度量有关的问题. Artzner 给出的风险度量定义的公理化体系, 同时也是对风险本身的定义. 相容风险度量本身所满足的公理化条件来自于风险管理实践中形成的共识. 通过这种公理化的风险度量体系, 有助于建立一体化的风险监控体系.

在一体化的风险管理中需要同时对收益分布的中部、尾部以及极端风险损失进行度量. 图 2.9 中显示了不同风险度量与不同风险损失之间的联系.

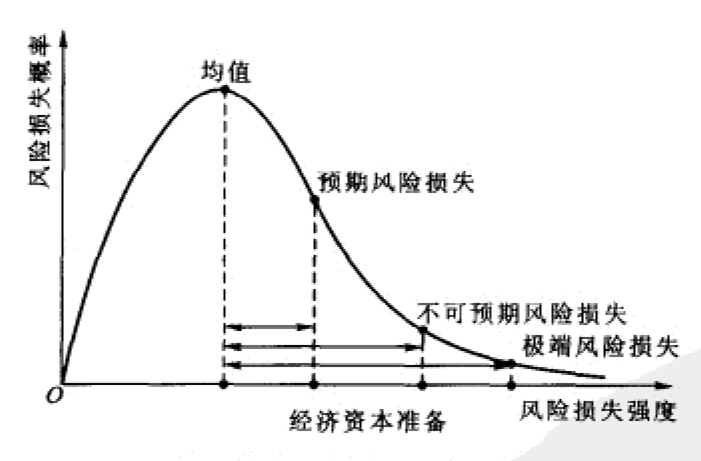


图 2.9 风险损失的分布曲线与经济资本准备

在一体化的风险管理中, 采用不同的风险度量指标来衡量收益分布中不同部分带来的风险损失规模. 标准差 (方差) 适合度量可以预期的市场风险损失; VaR 适合度量出现频率较低, 同时损失强度较高的信用风险损失; 当 $TVaR$ 与

损失的尾部分布结合在一起时，可以用来度量极端风险损失。不同类型的风险损失需要不同规模的风险资本准备，越是极端的风险损失就需要越多的经济资本。由于相容风险度量的凸组合仍然是相容风险度量，因此利用相容风险度量可以建立一体化的风险监管体系。

Fischer(2003) 证明了相容风险度量的凸组合仍然是相容风险度量。因此在风险管理中，如果分别采用不同的相容风险度量指标来衡量收益分布的中部、尾部以及极端风险损失，则其凸组合仍然是一个相容风险度量指标，从而可以保证在一体化的风险管理中，风险度量值始终保持一致性和有效性。

类似地，还可以采用不同的相容风险度量指标分别给出市场风险、信用风险、操作风险的度量值，则其风险度量结果的凸组合仍然满足相容性。

风险度量 是对风险资产在未来时刻可能带来的风险损失大小的一种衡量指标。在数学上风险度量是从风险空间到实数空间上的映射，最终可以用一个数字来表示风险的大小。在通常使用的风险度量指标中，标准差 (方差) 适合度量那些偏离预期收益较小的风险损失，VaR 适合度量靠近尾部的风险损失，尾部风险价值可以用来度量极端风险损失。

假定 (Ω, F, P) 表示给定的概率空间，所有随机变量都定义在 $\mathcal{L}^2(\Omega, F, P)$ 上，即方差有限。经济系统中有 J 个投资个体，个体之间用 $j = 1, \cdots, J$ 加以区别，它们共同构成投资者集合。

假定每个个体持有一种风险，即有 $N = J$ 种风险。在单期投资问题中，ξ_i $(i = 1, \cdots, N)$ 表示单位风险资产 i 在未来时刻 1 上的不确定收益。

定义 2.4.1 纯粹风险 (Pure Risk) 令 $x_i = \xi_i - E(\xi_i)$, 则有 $E(x_i) = 0$, 称 x_i 为纯粹风险。

纯粹风险衡量的是未来时刻 i 上，单位风险资产 ξ_i 相对其预期收益 $E(\xi_i)$ 的偏离程度 (见 Jorion,1997)。

特别当 $x_i = 0$ 时，有 $\xi_i \equiv E(\xi_i)$, 此时 ξ_i 表示无风险资产，具有确定的预期收益 $E(\xi_i)$。

令 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 表示由单位纯粹风险构成的风险集合，它是风险的最小单位，也是形成不同风险组合的基础 (Portfolio Base)。$S_X = \sum_{x_i \in X} x_i$ 表示由单位纯粹风险构成的 (线性) 风险集合。$Y \subseteq X$ 表示单位纯粹风险子集合，$S_Y = \sum_{x_i \in Y} x_i$ 表示由 X 的子集 Y 中风险构成的 (线性) 风险集合。

在金融风险管理中，可以将 S_X 理解为 风险资产组合。在风险共担中，也

可以将 $x_i(i=1,\cdots,N)$ 理解为对应于 N 个个体，各自独立面临的个体风险。

此时， S_X 表示总体风险(Aggregate Risk) 。如果将 $x_i(i=1,\cdots,N)$ 理解为 N 种不同的风险因素，则 S_X 表示 (线性)风险因素集合 。

定义 2.4.2 风险度量 风险度量是从风险空间到实数空间上的映射 $c(\cdot)=\mathcal{L}^2\longmapsto\mathbf{R}$, 并满足以下条件

(1) 正定性 (Positive Definiteness): 对任意风险 $x\in\mathcal{L}^2$, 有 $c(x)\geqslant 0$; $c(x)=0$ 当且仅当 $x=0$ 。

(2) 正齐次性 (Positive Homogeneity): 对任意常数 $a\geqslant 0$ 和任意风险 $x\in\mathcal{L}^2$, 有 $c(ax)=ac(x)$ 。

(3) 次可加性 (Subadditivity): 对任意风险 $x_1,x_2\in\mathcal{L}^2$, 有 $c(x_1+x_2)\leqslant c(x_1)+c(x_2)$ 。

Goovaerts(2003) 认为风险度量的选择需要具有明确的金融和经济学含义。下面我们给出定义 2.4.2 的风险度量条件中隐含的金融经济学意义。

注记 3 正定性表明在这样的风险度量下，任何非退化的不确定收益都具有风险。在退化的情况下，当 $x=0$ 时，有 $\xi=E(\xi)$, ξ 表示预期收益为 $E(\xi)$ 的无风险资产，风险等于 0 。

注记 4 次可加性反映出通过组合可以降低风险因素集合的整体风险水平，在 Goovaerts(1984) 中称之为风险的次可分解性 (Subdecomposability of Risk) 。分散化带来的风险降低效果可以表示为

$$D=c(x_1)+c(x_2)-c(x_1+x_2)\geqslant 0$$

满足次可加性的风险度量，可以保证风险因素集合的风险水平总是低于构成风险因素集合的各部分风险水平之和，即有 $D\geqslant 0$ 。换言之，加入额外的风险可能会增大总体风险水平，但是在满足次可加性的风险度量下，风险因素集合的风险增量一定不会超过该风险本身的风险值。即

$$c(x_1+x_2)-c(x_1)\leqslant c(x_2)$$

当 x_1,x_2 完全线性相关时，次可加性中的等号成立

$$c(x_1+x_2)=c(x_1)+c(x_2)$$

即风险因素集合的风险等于个体风险之和，这意味着风险因素集合中所有个体风险都受共同风险因素的影响，其不确定收益表现为同涨同跌。

注记 5 正齐次性反映的是次可加性中等号成立的情况。正齐次性

$$c(ax) = ac(x), \quad a = 1, 2, \cdots$$

可以反映出风险水平还依赖于头寸规模的大小，头寸越大则变现的时间就会越长，必然带来更多的风险 (例如，流动性风险、市场风险)，即同一种风险持有的头寸越多，其风险水平就会越高。因此，在一次交易中变现全部的 ax 所面临的风险损失会超过在 a 次交易中变现 x 所面临的风险损失的合计值。但是，当风险度量同时还满足次可加性时，就会得正齐次性的表达式。

正齐次性保证，当个体风险之间完全正相关，即不存在任何分散化效果的情况下，风险因素集合的风险水平等于个体风险水平之和。

正齐次性还能保证风险度量可以表达为金额的形式，并且不依赖于货币品种的选择。

在数学上，由风险度量所满足的上述性质可知，风险度量 $c(\cdot)$ 是定义在风险资产未来收益空间中的泛数。在二次可积的 $\mathcal{L}^2$ 空间中，风险度量可以具体地表示为

$$c(x_i) = < x_i, x_i >^{\frac{1}{2}} = \| x_i \| = (E(x_i^2))^{\frac{1}{2}} = \sigma(x_i) = \sigma(\xi_i)$$

其中 $\sigma(\cdot)$ 表示求标准差的运算。因此，传统金融投资理论中广泛使用的标准差，以及基于 Risk Metric 方法 (假定资产收益服从正态分布) 的 VaR 是满足上述性质的一种风险度量。

在金融实践中通常使用下面一些风险度量指标。

(1) 风险价值 (Value at Risk) 衡量的是在给定置信度下，为了应对未来可能发生风险损失需要的经济资本准备。假定风险资产 x 的收益分布函数为 $F(x)$，在 $1-\alpha$ 置信水平下，其 VaR 风险损失可以定义为

$$VaR_\alpha(x) = -F_\alpha^{-1}(x) \tag{2.4.1}$$

置信水平 $1-\alpha$ 越大， VaR 风险损失值就越高。

(2) 预期经济资本缺口 (Expected Shortfall) 衡量的是未来损失规模超过 VaR 经济资本准备的预期平均超额损失。

$$ES_\alpha(x) = E\left((-x - VaR_\alpha(x))^+\right) \tag{2.4.2}$$

(3) 风险资产 x 的尾部风险价值 (Tail Value at Risk) 衡量的是未来损失规

模达到并超过 VaR_α 的那部分风险损失的预期平均值。

$$TVaR_\alpha(x) = E(-x \mid x \leqslant F^{-1}(\alpha)) \tag{2.4.3}$$

$$= VaR_\alpha(x) + E(-x - VaR_\alpha(x) \mid -x \geqslant VaR_\alpha(x)) \tag{2.4.4}$$

$$= VaR_\alpha(x) + \frac{1}{\alpha} ES_\alpha(x) \tag{2.4.5}$$

由 (2.4.3) 式可知 $TVaR_\alpha \geqslant VaR_\alpha$.

(4) 相对于 $TVaR$ 而言，尾部条件期望损失 (Conditional Tail Expectation) 衡量的仅仅是未来损失规模超过 VaR 的那部分损失的预期平均值。

$$CTE_\alpha(x) = E(-x \mid -x > VaR_\alpha(x)) \tag{2.4.6}$$

由 (2.4.3) 式和 (2.4.6) 式可知，当 x 的分布函数连续时，$TVaR_\alpha(x) = CTE_\alpha(x)$.

由于 VaR, ES, CTE 不满足次可加性，因此不是相容风险度量；$TVaR$ 满足相容风险度量的四条性质，因此是相容风险度量. 其他的风险度量指标 (例如，波动率和方差)，都不满足无风险变换性和单调性，因此它们都不是相容风险度量. 有关风险度量指标发展和演变的论述可以参见 Darkiewicz, Dhaene 和 Goovaerts(2004) 。

VaR 衡量的是在给定置信度下，为了应对未来可能发生风险损失需要的经济资本准备. ES 衡量的是未来损失规模超过 VaR 经济资本准备的预期平均超额损失. $TVaR$ 衡量的是未来损失规模达到并超过 VaR 的那部分风险损失的预期平均值. CTE 衡量的仅仅是未来损失规模超过 VaR 的那部分损失的预期平均值. 图 2.10 是各指标的直观表示.

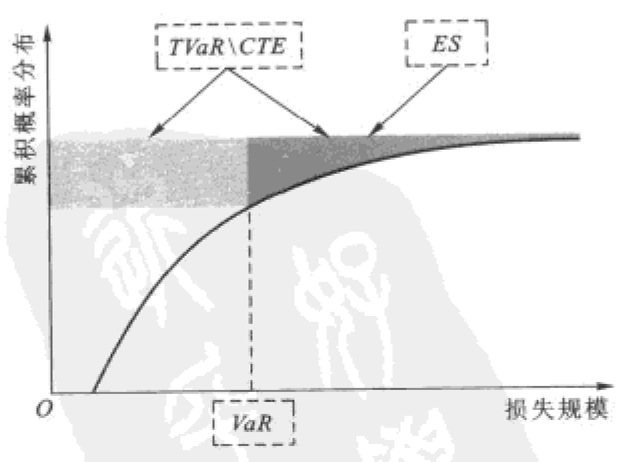


图 2.10 金融风险管理中通常使用的下方损失风险度量指标

§2.5 风险条件下的决策和选择

经济学家很精确地定义了 *商品* (Commodity), 即任何我们愿意花费一些东西去获得的东西都称之为商品. 定义一件商品有四种性质: 第一是它的物理特性; 第二是它可以使用的地理位置; 第三是它可供使用的时间; 第四是商品的受约束性. 受约束性意味着一件商品对于某特定事件可能是有用的或者是可供使用的, 也有可能不是. 不确定性经常同某些随机事件联系起来. 在我们定义什么是事件之前, 我们假定世界有 S 个状态 (State of Nature), 即 $X=\{x_1,\cdots,x_S\}$. 例如, 一件商品 (房子) 有两种状态, $S=2$, x_1 定义为房子着火了, x_2 定义为房子条件适宜可供居住. 一个事件就定义为 X 的一个子集. 事件越大, 不确定性越高. 不确定性指的是我们知道在未来时间一件商品一定有某个或某几个状态要发生但我们不知道是哪一个, 风险意味着我们知道这些状态发生的概率分布. 令 c 是一件商品, 我们假定 $c=x_s$ 对应的概率为 $\pi_s(s=1,\cdots,S)$.

§2.5.1 期望效用和对风险的偏好

既然存在许多种商品, 就需要对它们进行排序以便表明哪个商品是最受欢迎的, 这也是价值理论的基本原则: 通过对每一种商品赋值来为它们排序. 数学上赋值过程是在商品空间上建立一个次序关系. 有两种排序方式: 偏序 (Partial Order) 和全序 (Complete Order) . 偏序是指由某一个代理人建立的排序, 两个代理人各自的排序可能是互相冲突的. 例如, 代理人 A 认为资产 1 比资产 2 更有价值, 但代理人 B 认为资产 1 不如资产 2 有价值, 这就称作偏序. 我们还可以考虑一族代理人之间的排序, 例如, 我们可能不知道某一个代理人的具体偏好, 但我们知道他们都是风险厌恶的. 如果各代理人对商品空间中的排序具有一致的看法, 则称此种排序关系为全序. 我们首先考虑偏序关系.

令 C 是一个商品空间. $\succeq$ 称作 X 上的一个二元关系, 如果对于 C 内的两个商品 c_1 和 c_2, c_1 比 c_2 更受某个代理人欢迎. 如果 $c_1\succeq c_2$, 而且 $c_2\succeq c_3$, 则有 $c_1\succeq c_3$, 则称这个二元关系是 *可传递的*(Transitive) . 如果对于 C 内的任意两个商品 c_1 和 c_2, 要么 $c_1\succeq c_2$, 要么 $c_2\succeq c_1$, 则称这个二元关系是 *完全的*(Complete) . 也就是说, 任意两个商品都是可比较的. 一个偏好关系就是一个可传递和完全的二元关系. 如果有 $c_1\succeq c_2$, 而且 $c_2\succeq c_1$, 则两个商品 c_1 和 c_2

被称为是彼此无区别的 (Indifferent), 就用 $c_1 \sim c_2$ 表示. 商品 c_1 被称为严格优于 c_2, 如果 $c_1 \succeq c_2$ 而且 $c_1 \neq c_2$ 并记作 $c_1 \succ c_2$.

令 c_1, c_2 和 c_3 是在偏好 $c_1 \prec c_2 \prec c_3$ 下三个确定性的商品, 定义一个新的商品 c_p, $c_p = c_1$ 的概率是 p, $c_p = c_3$ 的概率是 $1-p$. 我们称某个二元关系是连续的, 如果它服从*阿基米德公理*: 存在一个概率 p 使得 $c_p \sim c_2$. Kreps (1988) 展示了, 如果一个二元关系是可传递的、完全的和连续的, 就存在一个连续的效用函数来表示这个二元关系, $V: C \to \mathbf{R}$ 使得 $c_1 \prec c_2 \Leftrightarrow V(c_1) < V(c_2)$. 经济学上, 我们可以这样来理解阿基米德公理: 如果我们拥有三只折现债券 (Discount Bonds), 而且每只承诺在每年年末支付固定的利息 c_i $(i = 1, 2, 3)$, 不妨假定 $c_1 < c_2 < c_3$, 该公理表明了我们可以在资本市场上基于无风险证券 c_1 和 c_3 构建一个衍生产品 c_p, 而且保证衍生证券 c_p 和无风险证券 c_2 的效用是无差异的.

数学上, C 定义为概率空间 (Ω, F, P) 上的一随机变量族, 令状态空间 S 为 $\mathbf{R}$ 的子空间, 例如, $S = \{s_1, s_2\} = \{-10\%, 10\%\}$, 其中 $s_1 = -10\%$ 意味着股票下跌 10 个百分点, $s_2 = 10\%$ 意味着股票上涨 10 个百分点. 在标准的概率框架下, 我们把每个商品 c 认为是 S 上的分布函数 F,$V = V(\{u_s\}, F)$, 其中 $\{u_s\}$ 是 S 上的效用函数族. 这里给出一个次序效用函数理论 (Ordinal Utility Theory), 次序效用函数意味着效用函数可以用不同商品的次序或排序来表示, 排序按照它们提供的让人满意程度来进行. 效用自身的水平并不提供什么信息, 不同商品间的效用差别也不提供什么信息. 在一个次序效用框架内, 只有所给的效用单调变化才有意义. 在下一节, 我们讨论基数效用 (Cardinal Utility) . 目标是通过评估一个商品的期望效用 (Expected Utility) 来表示代理人的偏好. 更精确地说, 我们希望找到一个函数 u_s, 它能把 S 中的每一点 x_s 映射到某个实数 $u_s(x_s)$. 为简单化, 我们假定 S 是有限状态, 即 $S = \{x_1, \cdots, x_S\}$. 一个依赖状态的期望效用可表示为

$$V(\pi) = u(x_1, \cdots, x_S) = \sum_{s=1}^{S} u_s(x_s)\pi_s \tag{2.5.1}$$

而一个状态独立的期望效用 (也称 Von Neumann-Morgenstein (NM) 效用) 可表示为:

$$V(\pi) = u(x_1, \cdots, x_S) = \sum_{s=1}^{S} u(x_s)\pi_s = E^{\pi}(X) \tag{2.5.2}$$

其中分布函数为 $\pi = \{\pi_1, \cdots, \pi_S\}$, 而且 $\sum_{s=1}^{S} \pi_s = 1$.

对于偏好的期望效用表达式需要的第一个基本的假设是, 状态本身仅仅是

一个标签而无关紧要，即 *状态独立性公理* (State Independence Axiom)．令一个商品 c_1 以概率 p 得到 $c_1=x$, 以概率 $1-p$ 得到 $c_1=y$, 而令另一个商品 c_2 以概率 $1-p$ 得到 $c_2=x$, 以概率 p 得到 $c_2=y$, 则状态独立性公理表示 $c_1\sim c_2$．

我们需要的第二个公理是 *构成无关性公理* (Consequentialism Axiom), 它说明的是投资者对于由不同基础商品构成的衍生商品或者另一个基础商品是不加区别的，只要他们最后具有相同的回报和风险．给定两个基础商品 c_1 和 c_2: $c_i=x_{1,i}$ 的概率是 $\pi_{1,i}$ $(i=1,2)$ 以及 $c_i=x_{2,i}$ 的概率是 $\pi_{2,i}$ $(i=1,2)$．另外有一个衍生商品 ——"商品的商品",$c=c_1$ 的概率是 π_1 ,$c=c_2$ 的概率是 π_2．再令另外一个基础商品 $d=x_{s,i}$ 的概率分别是 $\pi_i\pi_{s,i}$($i=1,2$ 和 $s=1,2$), 则构成无关性公理 说明了投资者对衍生商品 $c=f(c_1,c_2)$ 和基础商品 d 是不区分的．图 2.11 解释构成无关性公理．

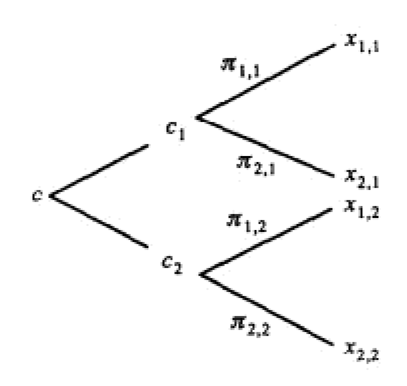


图 2.11 构成无关性公理的图示

第三个公理是 *共同选择无关性公理* (Irrelevance of Common Alternatives), 它表明对两个商品的偏好不会随着两个商品中都加入相同数量的某种新商品而改变．令 c_i $(i=1,2,3)$ 是三种不同的商品．令概率 $0<p<1$, 引进两个衍生商品 c_i^* $(i=1,2)$: $c_i^*=c_i$ 的概率是 p 而 $c_i^*=c_3$ 的概率是 $1-p$, 共同选择无关性公理意味着 $c_1\preceq c_2\Longleftrightarrow c_1^*\preceq c_2^*$．例如，假定你明天决定去旅游，你可以选择汽车或火车，但是你必须作出抉择因为你需要提前一天买票．共同选择无关性公理说明了你乘坐汽车或者火车的选择不会受你相关的出行可能性的影响，比如你可能今晚生病，或者从现在到明天早上有可能发生地震，当然在此情形下，你完全没法出行．图 2.12 解释了共同选择无关性公理．

基于以上的公理, 我们得到了一个投资者偏好的状态独立的期望效用 (2.5.2) 式．简单的证明参见 Gollier(2001, 第一章定理 1),Kreps(1988, 第五章) 给了一个完整的证明．

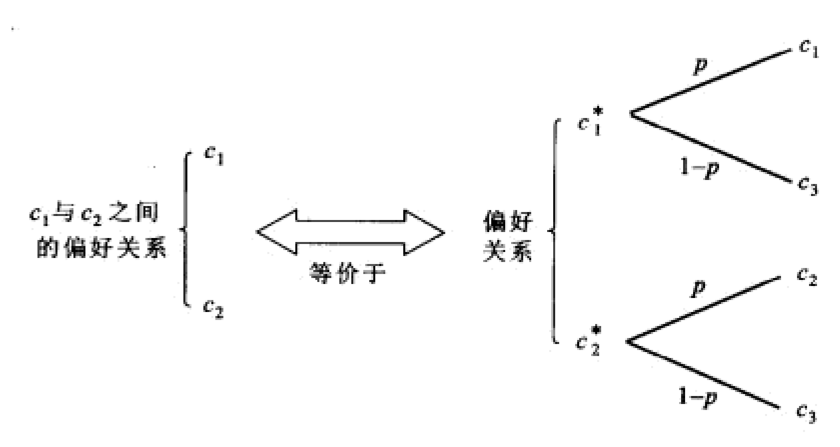


图 2.12　共同选择无关性公理的图示

生活中我们常常会发现，当面临不确定条件下的选择时，往往存在两种人：一种人更爱朝坏的方面想，生怕发生不利于自己的结果，在决策时谨小慎微；另一种人更喜欢朝好的方面想，生怕与有利于自己的结果失之交臂，在决策时热衷于冒险．由此说明，不同的人对待风险具有不同的态度．在经济学上，根据风险偏好的差异，可将决策者分为三类：风险厌恶 (Risk Aversion) 型、风险爱好 (Risk Loving) 型和风险中性 (Risk Neutral) 型．

为了说明这三种不同的风险偏好，我们先介绍"公平赌博"的概念，记以 p 的概率获得 $\epsilon = x$，以 $1-p$ 的概率获得 $\epsilon = y$ 的赌博为 $< x, p;\ y, 1-p >$．

定义 2.5.1　如果赌博 $< x, p;\ y, 1-p >$ 满足

$$E(\epsilon) = xp + y(1-p) = 0 \tag{2.5.3}$$

则称该赌博为公平赌博．公平赌博不改变个体当前的期望收益．在此基础上，我们可以划分三类不同的风险偏好．

定义 2.5.2　如果 $u(E(X)) \geqslant E(u(X))$，称个体是风险厌恶的；如果 $u(E(X)) \equiv E(u(X))$，称个体是风险中性的；如果 $u(E(X)) \leqslant E(u(X))$，称个体是风险爱好的．其中 $X = E(X) + \epsilon$．

风险厌恶者的效用函数是凹函数，其边际效用随着财富的增加而下降．风险厌恶者不会参加公平赌博．风险爱好者的效用函数是凸函数，他的边际效用随着财富的增加而增加．风险爱好者本质上是赌徒，他总是愿意参加任何公平赌博．风险中性者的效用函数是线性函数，其边际效用不随财富的改变而改变．风险中性者对是否参与公平赌博不觉得有什么差别，或者说，风险中性者无差

异于各种风险[①]. 图 2.13 展示了个体对待风险的三种态度.

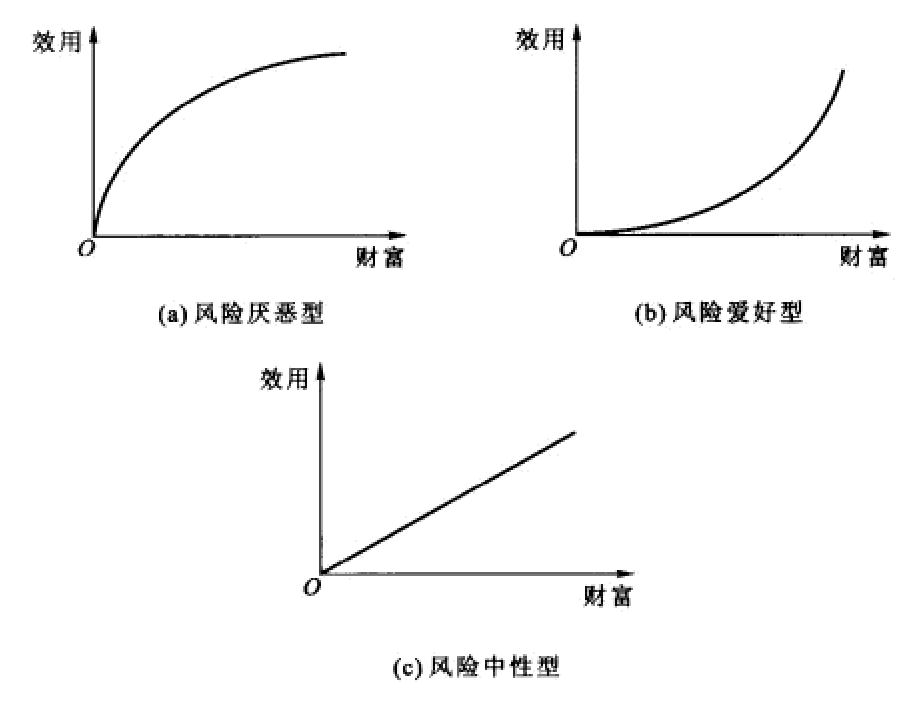


图 2.13 个体对待风险的三种态度

例 2.5.1 个体对待风险的三种态度可以用一个掷硬币的赌博例子予以说明. 假设游戏规则是这样的: 由一个公证人抛掷一枚硬币, 要求参加赌博的人猜其正反面, 硬币只抛掷一次, 猜对可赢 10 元, 猜错则要赔 10 元. 显然, 猜对与猜错的概率均为 1/2, 而且赌博的期望收益是 0, 表明该赌博是一个公平赌博. 现有 A 、 B 、 C 三人, 设他们的初始财富都是 10 元, A 的效用函数为 $u_{\mathrm{A}}(x)=\sqrt{x}$, B 的效用函数为 $u_{\mathrm{B}}(x)=x^2$, C 的效用函数为 $u_{\mathrm{C}}(x)=x$, 则初始效用 (不参加赌博) 分别为 $u_{\mathrm{A}}(10)\approx 3.16, u_{\mathrm{B}}(10)=100, u_{\mathrm{C}}(10)=10$. 对于 A 来说, 参加赌博的期望效用是 $E(u_{\mathrm{A}})=\frac{1}{2}u_{\mathrm{A}}(10+10)+\frac{1}{2}u_{\mathrm{A}}(10-10)\approx 2.24<3.16\approx u_{\mathrm{A}}(10)$. 对于 B 来说, 参加赌博的期望效用是 $E(u_{\mathrm{B}})=200>100=u_{\mathrm{B}}(10)$. 对于 C 来说, 参加赌博的期望效用是 $E(u_{\mathrm{C}})=10=u_{\mathrm{C}}(10)$. 对比 A 、 B 、 C 三者的初始效用与参加赌博的期望效用, 我们能够得知, A 是风险厌恶型, B 是风险爱好型, C 是风险中性型.

---

① 这里所说的 "风险中性" 实际上与衍生产品定价中所说的 "风险中性" 是一回事, 只不过此处是用效用函数的形式对 "风险中性" 加以严格定义, 这个定义更具有一般性. 如果将期望效用替换为期望收益的概念, 将初始财富视为无风险的收益, 将赌博视为有风险的收益, 则可以把 "风险中性" 说成是预期收益等于无风险收益这样一种状况, 这实际上正是衍生产品的风险中性定价原理.

§2.5.2 风险溢价 (Risk Premium)

风险溢价是在损失或回报上赋的一个实数值，它可以表示成货币的形式也可表示成百分比的形式．首先我们介绍一下本书用的一些符号．令 χ 表示概率空间 (Ω, F, P) 上非负的随机变量的集合，这是表示损失的随机变量的集合．令 X, Y, Z 等是标准的 χ 中的元素．最后令 H 表示风险溢价法则或者风险溢价函数，从 χ 映射到非负拓展的实数集上． $H(X)$ 可以取值 ∞ ．也可考虑将溢价法则 H 的定义域拓展到负的随机变量上．如果我们考虑一个一般损失的随机变量，这种拓展是有必要的，然而在此处，我们只需考虑非负的损失随机变量．

风险溢价可能具有以下的性质．

性质 1 独立性： $H(X)$ 仅依赖 X 的累积分布函数．也就是说， X 的溢价只依赖于 X 的尾部分布．

性质 2 对任意 $X \in \chi$ 都有 $H(X) \geqslant E(X)$ ．风险负载是受人欢迎的，因为通常存在一个对承担风险 X 进行补偿的溢价原则，从而实现对风险 (保险的目的) 的交换，风险负载是指这个补偿不低于期望值 $E(X)$ ．

性质 3 不需要风险负载：如果风险 X 等于常数 $c \geqslant 0$, 则 $H(X) = c$ ．

性质 4 最大损失： $H(X) \leqslant \max\limits_{X \in \chi}\{H(X)\}$ ．

性质 5 平移不变性：对所有的 $X \in \chi$ 和 $a \geqslant 0$, 均有 $H(X+a) = H(X)+a$ ．

性质 6 规模不变性：对所有的 $X \in \chi$ 和 $b \geqslant 0$, 均有 $H(bX) = bH(X)$ ．规模不变性在经济学文献中常称作一阶齐次性．规模不变性的本质是说明风险扩大两倍，其溢价也等于单个风险的溢价的两倍．无套利的观点通常被用来说明这个性质．事实上，如果 $2X$ 的溢价超过 X 的溢价的两倍，人们就可以通过从两个不同的保险商处买进 X 的保险，来实现买进 $2X$ 的保险，或者从同一个保险人处买进两份合约．

性质 7 可加性[①]：对所有的 $X, Y \in \chi$ 都有 $H(X+Y) = H(X) + H(Y)$ ．

性质 8 因为无套利的原则存在确保了两个风险之和的溢价不超过两个单独风险溢价的和．否则，保险的购买者就会分开购买两个风险的保险．

性质 9 超可加性：对所有的 $X, Y \in \chi$ 都有 $H(X+Y) \geqslant H(X) + H(Y)$ ．当存在额外的限制条件要求保险公司对较大的风险确保较大的风险负载覆盖时，超可加性就是一个合理的性质．

性质 10 独立风险的可加性：对所有的相互独立 $X, Y \in \chi$ 都有 $H(X+Y) = H(X) + H(Y)$ ．一些精算师可能认为性质 7(可加性) 太强了，无套利的结果只能

① 对于金融工具，常常出现的情形是货币形式具有可加性而百分比形式不具备可加性．

在相互独立的风险上应用. 他们因此回避对非独立的风险的额外限制的问题.

为了满足以上列举的性质和其他性质, 我们用不同的方法来计算风险溢价.

§2.5.2.1 直观的方法

方法 A—— 净溢价原则: $H(X) = E(X)$. 溢价原则不负载风险, 这是许多精算师学习的第一条原则.

方法 B—— 期望溢价价值原则: 对于某些 $\theta > 0$, $H(X) = (1+\theta)E(X)$. 这个溢价原则是建立在方法 A 的基础上, 净溢价原则加上一定比例的风险负载. 经常适应在介绍保险理论的保险经济学中. 参见 Bowers (1997) . 期望溢价价值原则对于某些保险客户来说易于理解.

方法 C—— 方差溢价原则: 对于某个 $\alpha > 0$, $H(X) = E(X) + \alpha\mathrm{Var}(X)$ 或 $H(X) = E(X) + \alpha\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$. 该溢价原则也是建立在净溢价原则的基础上, 再加上一个风险负载, 该风险负载同风险的方差或标准差成正比.

方法 D—— Esscher 溢价原则: 对于某个随机变量 Z, $H(X) = E(X\mathrm{e}^Z)/E(\mathrm{e}^Z)$. 我们将在后文中详细讲解这个原则.

§2.5.2.2 经济学的方法

风险溢价是指以货币形式度量的不确定性成本. 以风险厌恶者为例, 当风险厌恶者面临不确定条件下的选择时, 更多考虑的是现实的结果有可能比预想的要坏. 在选择不同方案时, 如果要让风险厌恶者选择图 2.14(a) 中的 B, 而不是 A, 就需 "额外" 给他支付一笔 "风险溢价" 费, 使得一旦发生比期望值要坏的结果, 他便能得到一笔补偿.

定义 2.5.3 我们称 $H(X)$ 为风险溢价, 如果

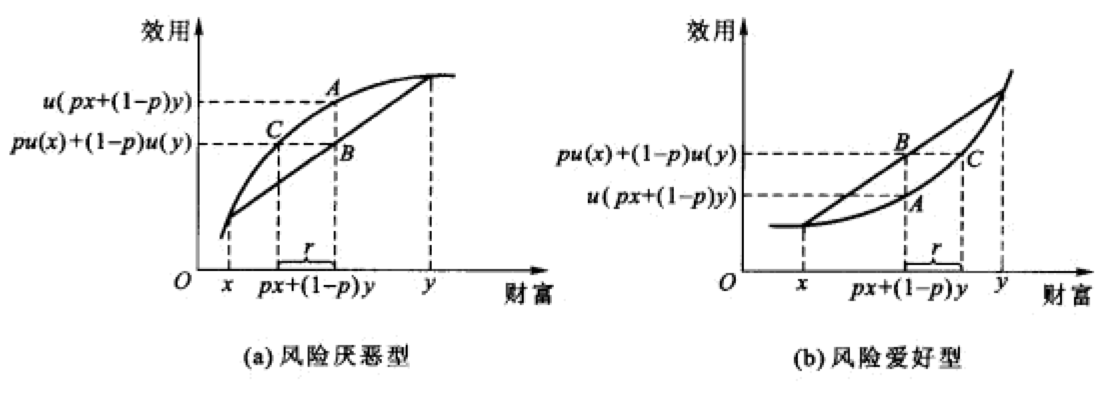
$$u(E(X) - H(X)) = E(u(X)) \tag{2.5.4}$$

我们称 $CE(X)$ 为一个确定性等价物 (Certainty Equivalent), 如果

$$u(CE(X)) = E(u(X)) \tag{2.5.5}$$

显然, 风险溢价的大小依赖于个体的偏好 (期望效用函数) 和具体的方案. 对于风险厌恶者 $H(X) > 0$, 风险爱好者 $H(X) < 0$, 风险中性者 $H(X) = 0$, 见图 2.14 . 或者当效用函数是单调的, 我们有

$$H(X) = E(X) - CE(X) \tag{2.5.6}$$



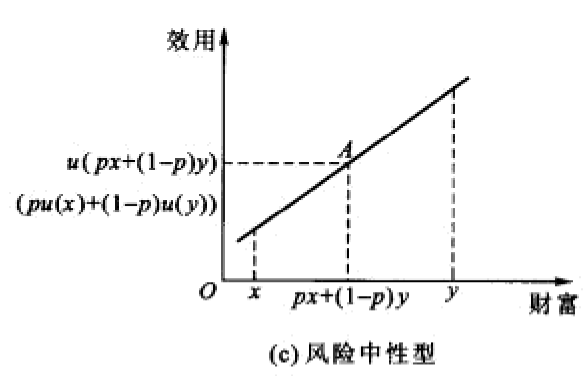


图 2.14 风险偏好与风险溢价图

例 2.5.2 设投资者拥有初始财富 1 000 元，用 1 000 元购买股票， 1 年后能够以概率 0.6 增值为 1 200 元，以概率 0.4 亏损成 900 元。假设投资者具有对数形式的效用函数 $\ln x$, 利用这一效用函数，我们可以计算出投资股票的期望效用： $E(\ln\text{股票}) = 0.6 \times \ln 1\,200 + 0.4 \times \ln 900 \approx 6.98$ 。这样一来确定性等价物是 $CE(\text{股票}) = \exp(E(\ln\text{股票})) \approx 1\,075$ 。其次 $E(\text{股票}) = 0.6 \times 1\,200 + 0.4 \times 900 = 1\,080$ 。从而 $1\,080 - H(\text{股票}) \approx 1\,075$, 即 $H(\text{股票}) \approx 5$ 。即购买股票的风险溢价是 5 元（或 0.5%, 换句话说，投资者认为这只股票的市场价格应为 5 元）。

从直观上讲，效用曲线越凹，个体的风险厌恶倾向越强。度量风险厌恶程度的一种方式是直接比较风险溢价的大小，另一种方式是用效用函数的导数来定义的所谓 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶系数 (Absolute Risk Aversion), 还有一种方式是用凹变换来比较不同个体的风险厌恶程度。不过， Pratt(1964) 已经证明三者实际上是等价的。下面我们仅给出在经济分析中应用比较广的 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶系数的定义，该定义是由 Pratt(1964) 和 Arrow(1970) 首先提出的。

定义 2.5.4 设效用函数 $u(x)$ 是二阶连续可微的，称

$$A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \tag{2.5.7}$$

为 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶系数．对于风险厌恶者，由于其效用函数的二阶导数为负，故 $A(x) \geqslant 0$ 。 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶系数是一种局部风险厌恶的度量，因为它依赖于财富水平．将 (2.5.7) 式的右端乘以个体的初始财富，就得到了 Arrow-Pratt 相对风险厌恶系数

$$R(x) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)} = xA(x) \tag{2.5.8}$$

例如，效用函数为 $\ln x$ 的投资者，其 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶系数是 $A(x) = 1/x$, 相对风险厌恶系数是 $R(x) = 1$ 。称

$$T(x) = \frac{1}{A(x)} \tag{2.5.9}$$

为风险容忍系数．

见表 2.1 和表 2.2 的讨论．

表 2.1　关于财富的绝对风险厌恶程度的变化

条件	定义	风险厌恶	效用函数的例子
增加风险厌恶	随着财富的增加，减少在风险资产上的头寸量	$A'(x) > 0$	$u(x) = x^{-\lambda x^2}$
恒定风险厌恶	随着财富的增加，保持在风险资产上的头寸量 (即相应地增加一部分财富到风险资产中)	$A'(x) = 0$	$u(x) = e^{-\lambda x^2}$
降低风险厌恶	随着财富的增加，加大在风险资产上的头寸量	$A'(x) < 0$	$u(x) = \ln x$

表 2.2　关于财富的相对风险厌恶程度的变化

条件	定义	风险厌恶	效用函数的例子
增加风险厌恶	随着财富的增加，减少在风险资产上的头寸比例	$R'(x) > 0$	$u(x) = x - bx^2$
恒定风险厌恶	随着财富的增加，保持在风险资产上的头寸比例	$R'(x) = 0$	$u(x) = \ln x$
降低风险厌恶	随着财富的增加，加大在风险资产上的头寸比例	$R'(x) < 0$	$u(x) = -e^{-2x-\frac{1}{2}}$

在 (2.5.4) 式的右边，令 $\epsilon = X - E(X)$, 假定 $\mathrm{Var}(X)$ 足够小，我们拥有一个二阶的泰勒展开式：

$$\begin{aligned} E(u(X)) &= E(u(E(X) + \epsilon)) \\ &\approx u(E(X)) + u'(E(X))E(\epsilon) + \frac{1}{2}u''(E(X))E(\epsilon)^2 \\ &= u(E(X)) + \frac{1}{2}u''(E(X))\mathrm{Var}(X) \end{aligned}$$

另一方面，从 (2.5.4) 式的左边，我们有一阶泰勒展开式：

$$u(E(X)-H(X))\approx u(E(X))-u'(E(X))H(X)$$

合并上述两个方程，我们得到风险溢价的一个近似公式：

$$H(X)\approx-\frac{1}{2}\frac{u''(E(X))}{u'(E(X))}\mathrm{Var}(X)=\frac{1}{2}A(E(X))\mathrm{Var}(X) \tag{2.5.10}$$

因此，当 X 的波动性足够小时，风险资产的风险溢价就同它的方差水平成正比，后文中我们将看到这个结论不是始终成立的。

注记 6　*双曲线绝对风险厌恶 (HARA,Hyperbolic Absolute Risk Aversion) 和线性风险容忍 (LRT,Linear Risk Tolerance) 效用函数类是最常用的函数类，这类效用函数是*

$$u(x)=\frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{ax}{1-\gamma}+b\right)^{\gamma},\ b>0\ 且\ \frac{ax}{1-\gamma}+b>0 \tag{2.5.11}$$

风险容忍系数是

$$T(x)=\frac{1}{A(x)}=\frac{1}{1-\gamma}x+\frac{b}{a} \tag{2.5.12}$$

该函数是 x 的线性函数。当 $\gamma>1$, 风险厌恶是随着 γ 递增的；当 $\gamma<1$, 风险厌恶是随着 γ 递减的，参见表 2.3。

表 2.3　一些有用的效用函数类

效用函数	γ	b
风险中性	1	任何值
负指数效用	$-\infty$	1
幂效用	<1	0
对数效用	0	0

§2.5.2.3　市场隐含的方法 (Implied Method)

隐含的方法是根据从市场的参与者处得到的市场数据计算出风险溢价，主要有以下几种典型的方法.

几何平均收益率测算方法：使用几何平均方法．根据沪深两市 A 股股票的实际收益 (沪市根据上证 A 股指数计算，深市根据深证 A 股指数计算) 和一年期国债的实际收益 (根据一年期国债利率期限结构计算)，用几何平均法测算 1997—2001 年期间 A 股股票的平均风险溢价，其中，沪市 A 股股票的平均风险溢价为 7.23%, 深市 A 股股票的平均风险溢价为 2.72%．从数字上看，沪深

两市的风险溢价差别比较大，主要原因是沪市 A 股在样本期间内年几何平均收益率高于深市 A 股 (可参看表 2.4)．

表 2.4 根据股票的实际收益计算的风险溢价 (1997—2001)

	沪市 A 股股票	深市 A 股股票	一年期国债
年几何平均收益率 /%	12.39	7.88	5.16
风险溢价 /%	7.23	2.72	—

股利贴现模型测算方法：利用股利贴现模型测量股权风险溢价，一般有两种方法：一种是 Gorden 模型， $P=\dfrac{D_1}{r-g}$，其中 D_1 为红利， g 为红利的永续增长率；另一种是多阶段模型．在实践当中， Gorden 模型因其简单而应用得比较广泛．在运用多阶段模型时，需要能够准确地估计各阶段的股利增长率，这是有一定难度的．在成熟市场国家，由于有一些权威的投资机构从事公司的财务分析与未来盈利的预测，如美国的 IBES 和 WEFA 集团，因而数据的取得比较容易．但在中国，目前还没有一家既从事此类业务而又能为大家所接受的机构，所以很难取得相应的数据．

由 Gorden 公式得到

$$r=\frac{D_1}{P}+g$$

略作变形，有

$$R_f+h=\frac{E_1\cdot b_1}{P}+g \tag{2.5.13}$$

其中， R_f 表示无风险利率， h 表示风险溢价， E_1 表示每股收益， b_1 表示派息比率。

(2.5.13) 式可以改写为

$$h=\frac{b_1}{P/E_1}+g-R_f \tag{2.5.14}$$

利用 (2.5.14) 式，我们测算了样本期间内按照实际派息比率每年应该取得的风险溢价和整个样本期间内的平均风险溢价 (见表 2.5)．

计算结果表明，根据每年实际发放的股利测算风险溢价， 1997—2001 年沪深两市 A 股股票年平均风险溢价均为负值，其中沪市为 −6.04%，深市为 −18.07%．需要注意的是沪深两市的风险溢价差别依旧比较大，造成这一差别的主要原因是股利增长率上的差异，在样本考察期间内，深市 A 股的平均每股

股利增长率要远远低于沪市 A 股[1](参见表 2.5)。与表 2.4 中的结果相比会发现，根据股利贴现模型计算得到的风险溢价要远远小于根据实际收益计算得到的风险溢价，这说明在中国股票市场上，股票的收益主要来自于价差，非理性的投机行为取代了投资行为，中国股票市场存在较大的投机性泡沫。

表 2.5 根据股利贴现 Gorden 模型计算的风险溢价

时间 \ 年份	派息比率 /%		无风险利率 /%	实际市盈率		风险溢价 */%	
	沪市 A 股	深市 A 股		沪市 A 股	深市 A 股	沪市 A 股	深市 A 股
1997	17.55	16.81	9.98	36.58	37.50	−10.92	−23.09
1998	24.75	28.95	5.92	34.56	36.63	−6.63	−18.69
1999	20.31	32.90	3.31	38.62	36.92	−4.20	−15.98
2000	21.34	30.45	3.61	48.60	49.20	−4.59	−16.55
2001	31.87	31.00	3.12	53.74	54.73	−3.95	−16.12
平均	23.16	28.02	5.16*	42.42	43.00	−6.04*	−18.07*

注：① 派息比率根据每年实际支付的股利计算；
② 实际市盈率为每年平均的市盈率 (算术平均)；
③ 股利增长率：沪市 A 股取样本期间 (1997—2001) 内的平均实际每股股利增长率 −1.42% (算术平均)，深市 A 股取样本期间 (1997—2001) 内的平均实际每股股利增长率 −13.56% (算术平均)。
* 平均无风险利率为几何平均，平均风险溢价根据 1997—2001 期间的平均派息比率 (算术平均)、平均市盈率和平均无风险利率计算得出。

§2.5.3 中外风险溢价的比较

表 2.6 和表 2.7 是中美两国股票市场中的股利增长率情况。从表 2.7 中可以看出，在第二次世界大战后各个时间段内 (除了 1970—1979)，美国股票市场的股利增长率与 GNP 的增长速度比较接近，股利增长率的变化跟宏观经济的变化基本一致。相反，中国股票市场的股利增长情况却不是这样，在 1997—2001 年期间，中国 GNP 的平均增长率为 7.8%，但沪市 A 股的平均股利增长率却是 −4.35%，深市 A 股的平均股利增长率也仅为 3.26%，不到 GNP 增长率的一半，这说明中国股票市场的股利增长率不能体现宏观经济的发展，上市公司的股利政策是存在问题的。

表 2.8 和表 2.9 是不同国家和地区的股权风险溢价情况。在成熟市场中，除了美国的股权风险溢价程度比较高之外，其他国家和地区的股权风险溢价并不

① 当然，造成这一局面的原因是多方面的，一方面与沪深两市上市公司的质量及股利政策有关，另一方面与沪深两市近年来在扩容速度上的差异也有一定的联系。例如，以 2001 年为例，从盈利上看，沪市 A 股的平均每股收益是 0.176 元，深市 A 股的平均每股收益是 0.06 元，这既有沪市新股发行较多的原因，也有深市上市公司的业绩不如沪市上市公司的原因，盈利上的不同必然导致股利分配上的差异。

高，另外，新兴市场的股权风险溢价普遍较高，如中国香港和新加坡，这可能与新兴市场存在一定的泡沫有关。

表 2.6　中国股票市场的股利增长率

时期	每股股利增长率 */%		GNP 增长率 */%
	沪市 A 股	深市 A 股	—
1997—2001	−4.35	3.26	7.80

* 几何平均.

表 2.7　美国股票市场的股利增长率

时期	每股股利增长率 */%	GNP 增长率 /%
1950—1959	5:15	6.69
1960—1969	5.66	6.89
1970—1979	5.83	10.14
1980—1989	7.11	7.83
1990—1999	4.72	5.37

* 由标准普尔指数中所含股票计算得出。

表 2.8　美国股票市场的风险溢价

时期	对短期国债的溢价 /%	对长期国债的溢价 /%
1926—1997	7.13	6.10
1962—1997	5.64	5.48
1981—1997	12.02	9.07

表 2.9　其他国家和地区的股权风险溢价 (1970—1996)

国家或地区	股票年平均收益率 /%	国债年平均收益率 */%	风险溢价 /%
澳大利亚	8.47	6.99	1.48
加拿大	8.98	8.30	0.68
法国	11.51	9.17	2.34
德国	11.30	12.10	−0.80
中国香港	20.39	12.66	7.73
意大利	5.49	7.84	−2.35
日本	15.73	12.69	3.04
墨西哥	11.88	10.71	1.17
荷兰	15.48	10.83	4.65
新加坡	15.48	6.45	9.03
西班牙	8.22	7.91	0.31
瑞士	13.49	10.11	3.38
英国	12.42	7.81	4.61

* 国债的年平均收益率是指长期国债的年平均收益率.



§2.5.4 随机占优 (Stochastic Dominance) 特性

在上述章节中，我们讨论了关于风险溢价的一个重要的想法，即如何通过风险溢价来度量风险程度. 基于风险溢价，我们可能说一个风险资产相对于一个无风险资产究竟有多大的风险. 然而，风险溢价是基于效用的. 如果我们面对不同效用的两个个体，对于相同的风险资产，我们还是有可能得到不同的风险溢价. 进一步，两个风险资产在两个效用函数下也可能得到相同的风险溢价. 换言之，基于效用的方法并没有对风险资产定义一个全序，而只是定义了一个偏序 . 一个很自然的问题随之而来：在什么样的条件下我们可以毫不含糊地说一个个体会偏好某一个风险资产胜过另外一个风险资产，我们所知的该个体的信息仅仅是他或者是不满足的 (财富越多越好)，或者风险厌恶的，而无需特定的效用函数形式. 我们需要在风险资产间建立一个全序. 令 U_1 表示单调递增的效用函数族 (个体总喜欢拥有更多的财富) . 令 U_2 是 U_1 的子集，且效用函数是凹的.

定义 2.5.5 一阶随机占优 令 X 和 Y 是两个随机变量. 我们称 X 对 Y 一阶随机占优 (First-order Stochastically Dominates)，写作 $X \succeq_{FSD} Y$，如果

$$P(X > z) \geqslant P(Y > z),\ \forall z \in \mathbf{R} \tag{2.5.15}$$

例 2.5.3 令 X 和 Y 是两个股票价格上涨或下跌的指示值，各自对应的概率分别是： $P(X\ \text{上涨}) = p$, $P(X\ \text{下跌}) = 1-p$ 和 $P(Y\ \text{上涨}) = q$, $P(Y\ \text{下跌}) = 1-q$. 则 $X \succeq_{FSD} Y$ 当且仅当概率 $p \geqslant q$. 换言之， X 上涨的概率大于 Y 上涨的概率.

注记 7 一阶随机占优的含义是“中性的”. 如果我们用 X 和 Y 表示损失变量 (Loss Variables)，且假定 $X \succeq_{FSD} Y$，既然 X 比 Y 遭受损失的概率更高，这意味着 X 比 Y 更有风险. 然而如果我们用 X 和 Y 表示投资收益变量 (Investment Return, 可正可负)，而且假定 $X \succeq_{FSD} Y$，则意味着 X 比 Y 风险更小，因为 X 遭受损失的概率 ($P(X \leqslant z)$) 比 Y 小. 或者从另外一个角度说，X 比 Y 更有吸引力，由于 X 获得收益的概率 ($P(X > z)$) 大于 Y . 接下来的定理就证明了我们的理解.

例 2.5.4 假定一只股票具有均值为 μ_E，方差为 σ_E^2 的收益，一只债券回报的均值为 μ_B，方差为 σ_B^2 . 股票回报均值较高，$\mu_E \geqslant \mu_B$，而方差较大，$\sigma_E \geqslant \sigma_B$，则股票对债券一阶随机占优吗？或者还是相反呢？结论是，两者都不可能对对方一阶随机占优. 奥秘在于尽管 $\mu_E \geqslant \mu_B$，但是 $\sigma_E \geqslant \sigma_B$.

定理 2.5.1 一阶随机占优定理 令 X 和 Y 为投资收益变量，则下列条件是等价的：

1. $X \succeq_{FSD} Y$；
2. $E(u(X)) \geqslant E(u(Y)),\ \forall u \in U_1$;
3. $F_X(z) \leqslant F_Y(z),\ \forall z \in \mathbf{R}$;
4. $X =^d Y + \epsilon$。

其中 ϵ 为非负随机变量，“$=^d$”表示同分布，$F_X(z) = P(X \leqslant z)$ 和 $F_Y(z) = P(Y \leqslant z)$。

注记 8 令 X 和 Y 是两只证券的收益，服从正态分布，且方差相同。根据定理 2.5.1，投资者喜欢 X 胜于 Y 时，当且仅当 X 的期望收益高于 Y 的期望收益，且两者的方差相等。

定义 2.5.6 二阶随机占优 我们称 X 对于 Y 是二阶随机占优的 (Second-order Stochastically Dominates)，写作 $X \succeq_{SSD} Y$，如果

$$\int_a^b P(X > x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b P(Y > y)\mathrm{d}y, \quad b > a \tag{2.5.16}$$

注记 9 二阶随机占优意味着在每个状态子空间 $[a, b]$ 上，X 的平均都对 Y 一阶随机占优。

引理 如果 $X \succeq_{SSD} Y$ 且 $E(X) = E(Y)$，则它们的方差大小顺序为 $\mathrm{Var}(X) \leqslant \mathrm{Var}(Y)$。换而言之，$X$ 比 Y 拥有更小的方差。

定理 2.5.2 二阶随机占优定理 令 X 和 Y 为投资收益变量，则下列条件是等价的：

1. $X \succeq_{SSD} Y$;
2. $E(u(X)) \geqslant E(u(Y)),\ \forall u \in U_2$;
3. $E(X) = E(Y)$ 并且 $S(y) = \int_0^y (F_X(z) - F_Y(z))\mathrm{d}z \leqslant 0,\ \forall y \geqslant 0$;
4. $Y =^d X + \epsilon$ 并且 $E(\epsilon|X) = 0$。 (2.5.17)

注记 10 二阶随机占优定理将二阶随机占优关系和偏好次序连接起来，遵从该偏好次序的代理人具有如下特征：(1) 对财富永不满足；(2) 风险厌恶。这意味着，二阶随机占优定理可以看成是“随机的风险更大”的关系。

定理 2.5.3 风险更大定理 如果 $X \succeq_{SSD} Y$，则 $Y = X + \epsilon$ 和 $E(\epsilon|X) = 0$。

注记 11 令 $f_1, \cdots, f_k$ 表示 k 个随机变量，且 $X = \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i$，$R$ 是一个收

益随机变量. 如果 $X \succeq_{SSD} R$, 则我们称 R 具有 k 因素结构, 由定理 2.5.3, 我们得到：

$$R = \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i + \epsilon \tag{2.5.18}$$

图 2.15 显示：

(1) 资产 2 占优资产 1, 因为资产 2 有更高的期望收益 (一阶占优的概念).

(2) 资产 2 占优资产 3, 因为资产 2 有更低的风险 (二阶占优的概念).

(3) 资产 4 占优资产 3, 因为资产 4 有更高的期望收益 (一阶占优的概念).

综合来看，资产 3 应该是最不受欢迎的资产，资产 2 和资产 4 均是在某种意义上受欢迎的资产，剩下的问题是资产 2 和资产 4 到底谁更受欢迎，或者谁更占优，答案是谁也不占优.

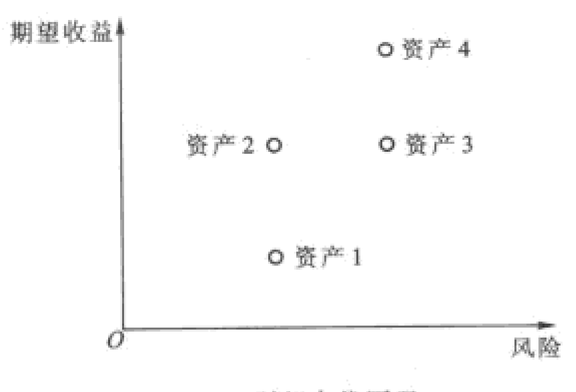


图 2.15 随机占优原理

§2.6 商品市场，金融市场和 AD 证券市场

传统微观经济学理论主要研究商品市场中生产与消费的均衡问题. 当存在未定权益合约 (Contingent Contract) 交易市场时，个体可以将财富拿到未定权益合约市场中进行交换，通过储蓄 (跨时间) 和保险 (跨状态) 的方式来获得更加平稳的消费流.

在金融经济学模型中总是假定商品市场中商品的均衡价格是事先给定的，从而研究未定权益合约市场中的效用最大化问题以及市场均衡问题.

§2.6.1 状态财富最优配置与风险资产最优选择问题

一般采用事件树 (Event-tree) 来刻画消费与投资问题在时间与状态上的不确定性, 即使同一种商品出现在不同时刻或不同状态下都将视为不同的商品.

令 $u(\cdot)$ 表示经济系统中某个体的效用函数.

w_0 表示在时刻 0 个体获得的初始禀赋. 假定在未来时刻 1 存在 S 种状态, $\boldsymbol{w}=(w_1,\cdots,w_S)^{\mathrm{T}}$ 表示在时刻 1 个体获得的依赖于状态的初始禀赋.

$p_s(s=0,1,\cdots,S)$ 表示事先给定的在时刻 0 以及时刻 1 的不同状态下, 消费商品的均衡价格.

$c_s(s=0,1,\cdots,S)$ 表示在时刻 0 以及时刻 1 的不同状态下, 个体消费的商品数量.

在时刻 0, 一部分货币财富被用来消费, 剩余的货币财富则被用来投资. 令 $C_0=p_0c_0$ 表示在时刻 0 个体的消费金额.

在两期模型中假定在时刻 1 个体将其获得的全部财富都用来进行消费, 因此在时刻 1 个体的消费金额等于其全部的货币财富收入.

$$\boldsymbol{W}=(W_1,\cdots,W_S)^{\mathrm{T}}=(p_1c_1,\cdots,p_Sc_S)^{\mathrm{T}} \tag{2.6.1}$$

个体在时刻 1 的货币财富收入由两部分构成: 一部分是在时刻 1 获得的初始禀赋; 另一部分是在时刻 1 获得的投资收益.

假定经济系统中存在 N 种风险资产, $\boldsymbol{q}=(q_1,\cdots,q_N)^{\mathrm{T}}$ 表示在时刻 $0, N$ 种风险资产的价格向量. $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_N)^{\mathrm{T}}$ 表示风险资产组合的持仓头寸向量.

在未来时刻 1, 单位风险资产的状态 — 收益 (State-dependent Payoff) 矩阵为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{S1} & \cdots & x_{SN} \end{pmatrix}$$

在未来时刻 1, 风险资产组合 $\boldsymbol{a}$的投资收益向量可以表示为

$$\boldsymbol{V}=(V_1,\cdots,V_S)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{a} \tag{2.6.2}$$

其中 $V_s=\sum_{i=1}^{N}x_{si}a_i$ 表示风险资产组合 $\boldsymbol{a}$在状态 s 下的投资收益回报.

假定证券市场是完备市场 (Complete Market), 即不存在冗余资产, 则有 $S=N$, 并且风险资产的状态 — 收益矩阵 $\boldsymbol{X}$是可逆矩阵.

$\boldsymbol{Q}=(Q_1,\cdots,Q_S)$ 表示货币财富的状态价格行向量，即一组 AD 证券的价格向量.

定义 2.6.1　AD 证券 (Arrow-Debreu Security)　价格为 Q_s 的 AD_s 证券承诺如果状态 s 发生，则支付一单位商品，如果其他状态发生，则不支付任何商品。

在完备市场假定下，任意风险资产价格都可以用一组 AD 证券价格来表示，即 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}$. 则有

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{-1} \tag{2.6.3}$$

在金融经济学框架下，个体同时面临跨期 (即在时刻 0 与未来时刻 1 之间选择消费商品)、跨状态 (即在 $c_1,\cdots,c_S$ 之间选择消费商品) 的商品消费最优配置，以及风险资产组合最优配置 (即选择风险资产的持仓比重 $a_1,\cdots,a_N$) 两个问题.

$$\max_{(c_0,c_1,\cdots,c_S),(a_1,\cdots,a_N)} \quad \{u(c_0,c_1,\cdots,c_S)\} \tag{2.6.4a}$$

满足

$$p_0c_0+\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=w_0 \tag{2.6.4b}$$

$$\begin{pmatrix} p_1c_1 \\ \vdots \\ p_Sc_S \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_S \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_S \end{pmatrix} \tag{2.6.4c}$$

我们注意到：

1. 根据 (2.6.1) 和 (2.6.2) 式，可以将约束条件 (2.6.4c) 等价地表示为

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{V}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{a}$$

在完备市场中状态 — 收益矩阵 $\boldsymbol{X}$ 可逆，则有

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{W}-\boldsymbol{w})$$

再代入约束条件 (2.6.4b) 中，有

$$C_0=w_0-\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{W}-\boldsymbol{w})$$

结合 (2.6.3) 式就有

$$C_0+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}=w_0+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{w} \tag{2.6.5}$$

因此，约束条件 (2.6.4b) 和 (2.6.4c) 等价于约束条件 (2.6.5) 。即折现后，个体总的消费金额等于总的财富收入．从而优化问题 (2.6.4) 可以转化为，在状态空间中，依赖于状态的货币财富最优配置问题：

$$\max_{(W_1,\cdots,W_S)} \quad \{u(C_0, W_1, \cdots, W_S)\} \tag{2.6.6a}$$

满足

$$C_0 + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{W} = w_0 + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{w} \tag{2.6.6b}$$

其中 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{-1}$ 表示货币财富的状态价格行向量．

由 (2.6.1) 式可知，在事先给定的消费商品均衡价格下，我们可以采用状态财富 C_0; $W_1, \cdots, W_S$ 作为决策变量．

当 $(W_1, \cdots, W_S)$ 确定以后，由约束条件 (2.6.6b) 有 $C_0 = w_0 + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}$，此时就可以确定 C_0 的取值．因此 $(W_1, \cdots, W_S)$ 是优化问题 (2.6.6) 的决策变量．

2. 由约束条件 (2.6.4c) 有

$$c_i = \frac{w_i + V_i}{p_i}, \quad i = 1, \ \cdots, S$$

代入目标函数 (2.6.4a) 中，可以将优化问题 (2.6.4) 转化为，在持仓头寸空间中，风险资产组合的最优选择问题：

$$\max_{(a_1,\ \cdots,\ a_N)} \quad \left\{u\left(c_0, \frac{w_1 + V_1}{p_1}, \cdots, \frac{w_S + V_S}{p_S}\right)\right\} \tag{2.6.7a}$$

满足

$$p_0 c_0 + \sum_{i=1}^{N} q_i a_i = w_0 \tag{2.6.7b}$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{N} q_i a_i = \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$ 表示投资在风险资产上的货币财富金额．

当消费商品均衡价格、个体依赖于状态的财富、风险资产的状态 — 收益矩阵给定时，由 (2.6.2) 式可知，我们可以采用风险资产的头寸向量 $(a_1, \ \cdots, \ a_N)$ 作为决策变量．

当 $(a_1, \ \cdots, \ a_N)$ 确定以后，由约束条件 (2.6.7b) 有 $c_0 = \dfrac{w_0 - \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}{p_0}$，此时就可以确定 c_0 的取值。因此 $(a_1, \ \cdots, \ a_N)$ 可以作为优化问题 (2.6.7) 的决策变量。

我们可将上述分析总结为下面的命题．

命题 2.6.1 状态空间中货币财富最优配置问题与头寸空间中组合最优选择问题的等价关系 在金融经济学框架下，假定市场是完备的，对于给定的风险资产价格向量 $\boldsymbol{q}$，一定存在一组状态价格向量 (即随机贴现因子)$\boldsymbol{Q}$，使得在状态空间中，对依赖于状态的货币财富的最优配置问题 (2.6.6) 等价于，在持仓头寸空间中，风险资产组合的最优选择问题 (2.6.7)。

注记 12 命题 2.6.1 成立的条件中并不要求市场必须是无套利的。如果市场满足无套利条件，则有状态价格 $Q_s > 0,\ s \in S$。在完备的无套利市场中存在唯一的正的随机贴现因子 $\boldsymbol{Q}$，即所谓的等价鞅测度。我们将在下面详述这些概念。

§2.6.2 AD 证券市场均衡与金融市场均衡的等价关系

上一小节中我们总结了研究个体最优消费配置问题的两种框架 (即状态空间或者头寸空间)。在完备市场假定下，不论采用哪一种分析框架得出的结论必然是一致的。

在状态空间中个体对依赖于状态的货币财富的配置，等价于在 AD 证券市场中对一组 AD 证券的配置；在头寸空间中个体对风险资产的头寸配置，就是在金融市场中的组合选择问题。下面我们考虑在完备市场假定下，当其中一个市场实现均衡时，是否同时意味着另一个市场也实现了均衡的问题。

在金融市场中，个体可以通过投资风险资产来实现风险共担。

定义 2.6.2 金融市场均衡 存在一组均衡的风险资产价格 $\boldsymbol{q} = (q_1, \cdots, q_N)^T$ 以及个体的风险资产头寸向量 $\boldsymbol{a_j} = (a_{j1}, \cdots, a_{jN})^T, j \in J$ 使得下面两个条件同时得到满足：

1. 个体的风险资产头寸向量 $\boldsymbol{a_j}$，$j \in J$ 是个体面临的风险资产组合最优选择问题 (2.6.7) 的最优解。

2. 金融市场出清：

$$\sum_{j=1}^{J} a_j = 0 \tag{2.6.8}$$

在 AD 证券市场中，个体通过投资 AD 证券来实现在状态空间中，对用于商品消费的货币财富的最优配置，从而形成风险共担。

定义 2.6.3 AD 证券市场均衡 存在一组均衡的状态价格向量 (即 AD 证券的价格向量)$\boldsymbol{Q} = (Q_1, \cdots, Q_S)$ 以及个体在不同状态下用于商品消费的货币财富配置向量 $\boldsymbol{W_j} = (W_{j1}, \cdots, W_{jS})^T$，$j \in J$ 使得下面两个条件同时得到满足：

1. 个体在状态空间中的财富配置向量 $\boldsymbol{W}_j$, $j \in J$ 是个体面临的货币财富最优配置问题 (2.6.6) 的最优解。

2. AD 证券市场出清: 在任意状态 $s \in S$ 下, 都有

$$\sum_{j=1}^{J} W_{js} = \sum_{j=1}^{J} w_{js} \tag{2.6.9}$$

其中 w_{js} 为个体 j 在状态 S 下的禀赋。

AD 证券市场出清条件 (2.6.9) 的含义是在任意状态 $s \in S$ 下, 市场对 AD 证券的总需求都等于总供给。

注记 13 根据上述两个市场均衡的定义, 我们可以看到金融市场的功能是使得个体之间可以相互交换风险资产未来的不确定收益, 从而实现对市场风险的分担。在金融市场中, 当个体持有高风险的资产组合时, 会要求更高的预期收益回报作为补偿。

AD 证券市场均衡则揭示了个体愿意持有不同风险资产背后所隐含的经济学动因。即个体持有风险资产的最终目的是在状态空间中完成用于商品消费的货币财富配置, 以便获得更加平稳的消费水平。

由 Michael Magill 与 Martine Quinzii(2002) 中的定理 10.6, 可以得到下面的命题。

命题 2.6.2 金融市场均衡等价于 AD 证券市场均衡 在完备市场假定下, 令 $\boldsymbol{q}$表示风险资产均衡价格向量, $\boldsymbol{a}_j(j \in J)$ 表示个体最优风险资产头寸配置向量。 $\boldsymbol{Q}$表示均衡的状态价格 (即 AD 证券价格) 向量, $\boldsymbol{W}_j(j \in J)$ 表示个体在状态空间中的货币财富最优配置向量. 则在 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{a}_j(j \in J)$ 下金融市场达到均衡等价于在 $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{W}_j$ $(j \in J)$ 下 AD 证券市场实现均衡。

证明: 由命题 2.6.1 可知, 给定风险资产价格 $\boldsymbol{q}$下, $\boldsymbol{a}_j$ $(j \in J)$ 是头寸空间中风险资产组合选择问题 (2.6.7) 的最优解, 当且仅当给定状态价格 $\boldsymbol{Q}$下, $\boldsymbol{W}_j$ $(j \in J)$ 是状态空间中货币财富配置问题 (2.6.6) 的最优解。

下面证明金融市场出清同时意味着 AD 证券价格市场出清. 由风险资产最优配置问题对应的约束条件 (2.6.7b) 有

$$\sum_{j=1}^{J} p_0 c_{j0} + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \sum_{j=1}^{J} \boldsymbol{a}_j = \sum_{j=1}^{J} w_{j0}$$

其中 c_{j0} 表示个体 j 在时刻 0 消费的商品数量。再由货币财富最优配置问题对

应的约束条件 (2.6.6b) 有

$$\sum_{j=1}^{J} C_{j0} + \boldsymbol{Q}\sum_{j=1}^{J}(\boldsymbol{W}_j - \boldsymbol{w}_j) = \sum_{j=1}^{J} w_{j0}$$

其中 C_{j0} 表示个体 j 在时刻 0 的消费金额. 则有

$$\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{J}\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{Q}\sum_{j=1}^{J}(\boldsymbol{W}_j - \boldsymbol{w}_j)$$

因此，上式中左侧 $\sum_{j=1}^{J}\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}$ 时，等价于右侧 $\sum_{j=1}^{J} W_{js} = \sum_{j=1}^{J} w_{js}$ $(s = 1, \cdots, S)$，即金融市场达到均衡等价于 AD 证券市场实现均衡. □

由命题 2.6.2 可知，在完备市场假定下两个市场的均衡是等价的. 即金融市场和 AD 证券市场中的风险共担问题在本质上是一致的，个体交易风险资产同样可以实现在状态空间中对用于商品消费的货币财富的配置.

但是在不同的市场中，人们研究风险共担问题的工具和目的是不一样的. 在金融市场中，人们往往借助风险度量指标来研究风险共担在组合管理中的应用，即组合风险的分配问题以及与此相关的组合风险分散化效果. 目的是将组合风险以一种合理的方式分配给各个子组合.

在 AD 证券市场中，人们关心的问题是风险共担对所有个体效用水平的改善，即研究帕累托有效的风险共担原则 (Pareto Efficient Risk Sharing Rule) 所具有的性质. 因此，对于不同的研究目标必须使用不同的研究框架.

§2.7　风险条件下的估值原理

§2.7.1　交换风险和收益的估值原理

令 AD_s 表示状态 s 下的第 s 只 AD 证券，则商品 (或风险资产)X 可以看成是 AD 证券的组合，即可表示为

$$X = \sum_{s=1}^{S} x_s AD_s \tag{2.7.1}$$

令 p_s 表示 X 出现状态 s 的概率，即 $P(X = x_s) = p_s$. 令 π_s 表示 AD_s 的市场

价格，则我们得到了该风险资产的预算约束线 $\sum_{s=1}^{S}\pi_s x_s = M$, 其中 M 为给定的财富水平. 最优的资产组合由期望效用函数给出：

$$\max_{x_s}\left\{E(u(X))=\sum_{s=1}^{S}u(x_s)p_s\right\} \tag{2.7.2}$$

约束为

$$\sum_{s=1}^{S}\pi_s x_s = M \tag{2.7.3}$$

运用拉格朗日乘子法，我们得到状态价格 π_s 由以下方程组决定：

$$\frac{\pi_i}{\pi_j}=\frac{\partial E(u(X))}{\partial x_i}\bigg/\frac{\partial E(u(X))}{\partial x_j}=\frac{p_i u'(x_i)}{p_j u'(x_j)}=MRS_{i,j},\qquad i,j=1,\cdots,S \tag{2.7.4}$$

其中 $u'(\cdot)$ 表示效用函数 $u(\cdot)$ 的微分，换言之，该方程组又回到最基本的定义原则： 价值由边际替代率 $MRS_{i,j}$ 来确定，但它与状态出现的概率有关！

第二步，在无差异曲线上，对这些方程进行差分.

$$\sum_{s=1}^{S}u(x_s)p_s = E(u(X)) = k \tag{2.7.5}$$

得到

$$\mathrm{d}x_s u'(x_s)p_s = 0 \tag{2.7.6}$$

特别地，当 $S=2$, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2}=-\frac{p_2u'(x_2)}{p_1u'(x_1)}=-MRS_{2,1} \tag{2.7.7}$$

注记 14 (保险合约的估值) 我们用一个简单的例子来说明风险条件下的估值原则. 假定一个个体最初拥有价值 35000 元的资产，但是存在一种可能他会失去其中的 10000 元。例如，他的汽车可能被偷，或者房子发生火灾。假定这个意外发生的概率为 $p=1\%$, 则该个体面临的风险是以 1% 的概率，资产价值为 25000 元；以 99% 的概率资产价值为 35000 元.

保险提供了一个途径来改变这个损失概率. 假定该个体购买了一份 K 元的保险，并为此支付 γK 的保费，加上这个保险，他将面临另外一种资产的损失分布：以 1% 的概率，资产价值为 $x_b = 25000 + K - \gamma K$; 以 99% 的概率，

资产价值为 $x_g = 35\,000 - \gamma K$。则该个体会选择什么样的保险呢？显然，这个选择同他的偏好有关，γ 是保险的费率，必须对保险公司和受保人都是公平的。K 是受保人购买的保险额度，可以完全由他自己决定。现在如果我们持有两只 AD 证券，AD_g 表示好的状态，即没有任何损失发生；AD_b 表示坏的状态，即损失确实发生了。因此保险过的资产就是一个 AD 证券的组合。

$$\text{保险过的资产} = (35\,000-\gamma K)AD_g+(25\,000+K-\gamma K)AD_b \tag{2.7.8}$$

沿着预算线，在好的状态下失去的额外消费除以在坏的状态下得到的额外消费是

$$MRS_{b,g} = -\frac{\Delta C_g}{\Delta C_b} = \frac{-\gamma K}{-K+\gamma K} = \frac{\gamma}{1-\gamma} \tag{2.7.9}$$

这就是穿过初始禀赋点预算线的斜率。它类似于个体在好状态下消费的价格是 $1-\gamma$，在坏状态下消费价格是 γ，见图 2.16。

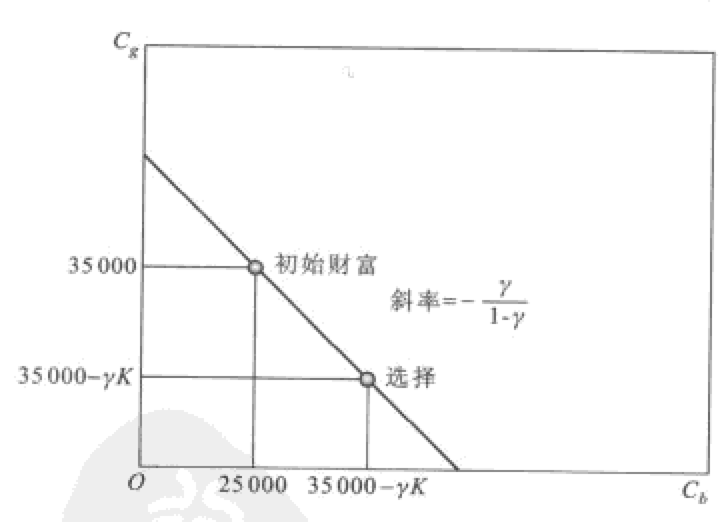


图 2.16 购买保险时的财富预算线

注：财富预算线与购买的保险有关，通过缴纳保费 γ，投保人放弃在好的状态下的消费 C_g 以换取在坏的状态下的消费 C_b。

根据 (2.7.7) 式，可得

$$\frac{pu'(x_b)}{(1-p)u'(x_g)} = MRS_{b,g} = \frac{\gamma}{1-\gamma} \tag{2.7.10}$$

如果我们坚持受保人只有在损失发生时一元收入带来的边际效用等于损失没有发生时一元收入带来的边际效用情况下才会购买这份保险合约的定价

原则：

$$u'(x_g) \equiv u'(x_b) \tag{2.7.11}$$

这样就给出了该合约的公允价格

$$\gamma = p = 1\% \tag{2.7.12}$$

让我们进一步假定受保人是风险厌恶的，以致于财富的边际效用是随着财富的增多而下降的，因此，为了使等式 (2.7.11) 成立，对于受保人必须有 $x_g = x_b$。既然 $x_g = 35\,000 - \gamma K$ 且 $x_b = 25\,000 + K - \gamma K$，于是我们得到

$$35\,000 - \gamma K = 25\,000 + K - \gamma K \tag{2.7.13}$$

这便推出 $K = 10\,000$，这意味着当有一个机会以公平的费率购买保险时，一个风险厌恶的受保人会选择全保。因而受保人会付给保险公司的全部保费就是 $\gamma K = 1\% \times 10\,000 = 100$(元)。这实质上等于受保人买保险前损失的期望。

$$E(\text{损失}) = (35\,000 - 35\,000)\cdot(1-p) + (35\,000 - 25\,000)\cdot p = 100(\text{元}) \tag{2.7.14}$$

但买保险前最大的潜在损失是 10000 元，而买保险后，损失的期望依然是

$$\begin{aligned} E(\text{损失}) =& (35\,000 - 34\,900)\cdot(1-p) + \\ & (35\,000 - 25\,000 - 10\,000 + 100)\cdot p \\ =& 100(\text{元}) \end{aligned} \tag{2.7.15}$$

最大的潜在损失是 0，因为资产价值在所有状态下都是 34900 元。

很自然，一个新的问题出现了，谁会承担这个潜在的损失风险呢 (或者说为什么有保险公司这样的商业公司愿意去承担这个潜在的损失风险)？这个答案就是风险共担的经济学思想。

注记 15 (风险共担) 以保险举例。假定有 1000 个个体，平均每年会有 10 次损失发生，因此总损失为 100000 元，这 1000 个个体每年都面临着 1% 概率乘上 10000，即 100 元的期望损失。我们假定每个人是否遭受损失不影响其他人遭受损失的概率，即我们假定风险是独立的。每个个体的财富期望是 $0.99 \times 35\,000 + 0.01 \times 25\,000 = 34\,900$(元)。但是每个人都承受着巨大的潜在风险：每个人都有 1% 的概率失去 10000 元的财产。

假定每个个体都决定分散化他面临的风险，他们将如何操作呢？答案是把他们风险的一部分卖给其他的个体。假定这 1000 个个体决定互相保险，如果谁不幸遭受了 10000 元的损失，1000 个个体每个人都贡献 10 元给这个受损失的人。通过这种方式，这个不幸的人遭受的损失就得到了补偿。其他的人也会拥有平安的感觉，就算他们自己受到损失，也一样会得到补偿。这就是风险共担的实例，每个个体都把自己的风险分散给所有的人，因而减小了他自己承受的风险。

现在在平均意义上，每年都会有 10 间房子被烧毁，因此，这 1000 个个体平均每年都会付出 100 元，但这仅仅只是平均数，某些年份可能损失 12 次，某些年份可能只有 8 次。

但是，还是存在一个途径去分散这个不确定的风险。假定屋主同意不管是否受灾，每年付固定的 100 元，这样他们可以建起一个现金储备基金用在某些多次受灾的年份。

可见，我们所构想的非常类似于一个保险公司，只不过比保险公司增加了一些特性：保险公司用它的现金储备基金进行投资，并获得资产收益等等。但本质上，一个保险公司的功能已经清楚地被表述了。

注记 16 (AD 证券的价格) 当一个未定权益的市场 (Contingent Market) 上存在 AD 证券时，由 (2.7.4) 和 (2.7.9) 式我们得到了状态价格方程

$$\frac{\pi_g}{\pi_b} = MRS_{g,b} = \frac{1-\gamma}{\gamma} = 99\%/1\% = 99 \tag{2.7.16}$$

换言之，好状态时的价格 π_g 是坏状态时的价格 π_b 的 99 倍。如果我们对状态价格实行如下规范化：

$$\pi_g + \pi_b = 1 \tag{2.7.17}$$

就能得到 $\pi_g = 1-\gamma = 1-p$ 和 $\pi_b = \gamma = p$。接下来，我们将展示在无套利 (No-arbitrage) 的条件下或者风险中性的世界里：

$$\text{坏状态发生的风险中性概率}\pi_b > \text{坏状态发生的自然概率}p \tag{2.7.18}$$

其秘密在于在好的状态下和坏的状态下一个单位的边际效用的补偿是不同的。对一个风险中性的投资者而言，如果财富量相同，好的状态的边际效用比坏状态的边际效用更低 (或等价地，坏状态的边际效用更高)，数学上，我们定义一

个期望效用函数:

$$E(u(X)) = u_g(x_g)(1-p) + u_b(x_b)p \tag{2.7.19}$$

且

$$u'_g(x) \equiv k u'_b(x), \quad k < 1 \tag{2.7.20}$$

例如, $k = 0.5$ 意味着好的状态下一个单位的边际效用等于坏的状态下半个单位的边际效用. 这样保证了完全受保 (即 $x_g = x_b$) .

$$\frac{\pi_g}{\pi_b} = MRS_{g,b} = \frac{(1-p)u'_g(x_g)}{pu'_b(x_b)} = \frac{(1-p)k}{p} \tag{2.7.21}$$

结合 (2.7.17) 和 (2.7.21) 式, 通过一些计算, 我们得到

$$\pi_b = \frac{p}{p+(1-p)k} > p \tag{2.7.22}$$

§2.7.2 风险中性资产定价模型和随机折现因子 (SDF) 资产定价模型

在 §2.7.1 中我们已经看到任何资产均可由 AD 证券来表示, 由 (2.7.1) 式, 我们得到一般风险资产的价格为

$$P = \pi(X) = \pi\left(\sum_{s=1}^{S} x_s AD_s\right) \tag{2.7.23}$$

假定一价定律 (Law of One Price) 成立, 则有

$$P = \sum_{s=1}^{S} x_s \pi(AD_s) = \sum_{s=1}^{S} x_s \pi_s \tag{2.7.24}$$

特别如果我们考虑无风险资产 R_f, 即当前的价格为 1, 而在未来不论哪个状态 s 均有收益 $x_s = 1 + R_f$, 例如 $R_f = 5\%$, 由上式我们得到

$$1 = \sum_{s=1}^{S} (1+R_f)\pi_s \tag{2.7.25}$$

从而

$$\sum_{s=1}^{S} \pi_s = \frac{1}{1+R_f} \tag{2.7.26}$$

即 AD 证券的价格之和为无风险利率 的倒数。

令

$$q_s = \pi_s \Big/ \left(\sum_{s=1}^{S} \pi_s\right) \tag{2.7.27}$$

则结合 (2.7.25) 和 (2.7.24) 式，我们得到

$$P = \frac{1}{1+R_f} \sum_{s=1}^{S} x_s q_s \tag{2.7.28}$$

如果假定 AD 证券价格 π_s 是非负的 (下面我们将讨论在什么条件下 π_s 为非负), 则由于

$$\sum_{s=1}^{S} q_s = 1 \tag{2.7.29}$$

我们可将 $\{ q_1, \cdots, q_s \}$ 称为一个概率分布，则 (2.7.28) 式可表达为

$$P = \frac{1}{1+R_f} E^*(X) \tag{2.7.30}$$

其中 E^* 表示在概率分布 $\{ q_1, \cdots, q_s \}$ 之下的期望值。

金融经济学家 (Kreps,Ross 等) 称上述概率分布为风险中性概率分布 (Risk-neutral Probability Measure), 并且由 (2.7.28) 式我们知道，给定风险资产 X 之后，如何对 X 正确定价的关键是找到一组风险中性概率分布，它不仅与 X 自身的风险相关，而且与资本市场的其他风险资产的风险有关，在多周期的定价过程中，上述风险中性概率分布被称为等价鞅测度 (Equivalent Martingale Measure) . 因为在该概率测度下，风险资产序列 $X_1, \cdots, X_t, \cdots$ 成为一个鞅序列。这些定价过程我们称为风险中性定价 (RNP, Risk-neutral Pricing) .

由 (2.7.4) 和 (2.7.27) 式，我们有

$$\frac{q_i}{q_j} = \frac{\pi_i}{\pi_j} = \frac{p_i u'(x_i)}{p_j u'(x_j)} \tag{2.7.31}$$

这样我们得到

$$P = \frac{1}{1+R_f} \sum_{s=1}^{S} x_s q_s = \frac{1}{1+R_f} \sum_{s=1}^{S} x_s \frac{q_1 u'(x_s)}{p_1 u'(x_1)} p_s \tag{2.7.32}$$

令

$$m_s = \frac{1}{1+R_f} \frac{q_1 u'(x_s)}{p_1 u'(x_1)}$$

则有

$$P = \sum_{s=1}^{S} x_s m_s p_s \tag{2.7.33}$$

由于 $\{p_1, \cdots, p_s\}$ 为状态出现的概率，因此我们有

$$P = E(mX) \tag{2.7.34}$$

其中 E 为概率分布 $\{p_1, \cdots, p_s\}$ 下的期望，即我们得到定价的另一种一般表达方式，称为随机折现因子定价方程，随机变量 m 称为 SDF(Stochastic Discount Factor) 因子，即将如何对风险资产 X 定价的问题变成如何寻找一个 SDF 因子 m 。

注记 17 由 (2.7.34) 和 (2.7.30) 式，我们有

$$P = \frac{1}{1+R_f} E^*(X) = E(mX) \tag{2.7.35}$$

采用测度空间上的积分表达形式，我们有

$$P = \frac{1}{1+R_f} \int X \mathrm{d}Q = \int mX \mathrm{d}p = \int \frac{1}{1+R_f} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p} X \mathrm{d}p \tag{2.7.36}$$

这样我们得到

$$m = \frac{1}{1+R_f} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p} \tag{2.7.37}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}$ 为两个概率测度之间的 Radon-Rikodym 导数。

所有的资产定价模型均可纳入折现因子的框架下，无论是总体均衡模型抑或套利定价模型，无论其决定变量是基于效用函数形式抑或因素定价形式，无论其呈现的是连续形式抑或是离散形式。

§2.7.2.1 基于消费的定价模型

Robert Lucas (1978) 和 Douylas Breeden (1979) 考察了在所有消费者完全一致，且只有一种商品的纯交换经济环境下的均衡资产价格。在这种经济中，每一消费者最大化同一形式的效用函数，资产被定义为对生产者之一所生产的全部或部分产品的要求权 (Claim) 。在这一模型中，假设存在代表性消费者，人均消费与代表性消费者完全相关。Lucas (1978) 和 Breeden (1979) 给出了此代表性消费者模型下的均衡状态下的资产定价公式，即基于消费的资产定价模型 (Consumption-based Capital Asset Pricing Model) 。在时间和状态可加的偏好假设下，代表性消费者的跨期总效用简化为

$$u(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \beta E_t(u(c_{t+1}))$$

其中 $E_t(\cdot)$ 是以 t 时可得信息为条件的期望算子； $u(\cdot)$ 为消费者的效用函数； c_t 表示 t 期消费； c_{t+1} 为随机变量，表示 $t+1$ 期消费； β 表示消费者把当期消费转化为下期消费的不耐心程度，不耐心程度越高， β 越小. 因此，消费者的效用最大化问题变成

$$\max_{\xi} \ \{u(c_t) + \beta E_t(u(c_{t+1}))\}$$

满足

$$\begin{aligned} c_t &= e_t - p_t\xi \\ c_{t+1} &= e_{t+1} + x_{t+1}\xi \end{aligned}$$

其中 e_t, e_{t+1} 分别表示投资者在 t 和 $t+1$ 期的禀赋， x_{t+1} 表示买入的资产在 $t+1$ 期的回报， p_t 表示资产在 t 期的价格， ξ 表示资产买入的量. 根据欧拉方程，导出资产的均衡定价等式为

$$p_t u'(c_t) = E_t(\beta u'(c_{t+1}) x_{t+1}) \tag{2.7.38}$$

或者

$$p_t = E_t\left(\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1}\right) \tag{2.7.39}$$

我们把 (2.7.39) 式拆分成两部分：

$$\begin{aligned} p_t &= E_t(m x_{t+1}) \\ m &= \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \end{aligned}$$

其中 m 表示边际替代率，此处即是基于消费的定价模型中的随机折现因子.

§2.7.2.2 多周期框架的定价问题

当我们做估值工作时，由于我们必须在一个多周期的框架下考虑问题，从而使得估值事宜变得复杂起来. 为确定时刻 $t=0$ 时的价格 p_0, 我们不得不考虑时刻 $t=1$ 时的价格 p_1, 进一步我们不得不确定价格 p_2, 这完全可能是一个推断到无穷未来收益状况的工作. 如果我们考虑条件 SDF 模型：

$$p_t = E(m(d_{t+1} + p_{t+1})|\sigma_t), \quad t = 1, 2, \cdots \tag{2.7.40}$$

其中，σ_t 为直到时刻 t 的信息集 ($\sigma-$ 代数) 并且 $\sigma_t \subset \sigma_{t+1}, t = 1, 2, \cdots$, d_t 为在时刻 t 时以分红、回购股票等形式从资产方到投资者手中的现金流. 特别地，当

d_t 是事先确定的现金流结构和到期期限的资产，我们称为固定收益证券．有时人们测定 SDF 因子 m 是 σ_{t+1} 可测的，即在 t 时刻， m 包括对未来 $t+1$ 的信息判断．这里我们假定 m 为一个具有有限二阶矩的随机变量．由 (2.7.40) 式，我们有

$$\begin{aligned}
p_t =& E(md_{t+1}|\sigma_t) + E(mp_{t+1}|\sigma_t)\\
=& E(md_{t+1}|\sigma_t) + E(mE(m(d_{t+2}+p_{t+2})|\sigma_{t+1})|\sigma_t)\\
=& E(md_{t+1}|\sigma_t) + E(mE(md_{t+2}|\sigma_{t+1})|\sigma_t) + E(mE(mp_{t+2}|\sigma_{t+1})|\sigma_t)
\end{aligned}$$

记

$$m_t = E(m|\sigma_t) \tag{2.7.41}$$

通过取迭代条件期望，我们有

$$\begin{aligned}
p_t =& E(md_{t+1}|\sigma_t) + E(mm_{t+1}d_{t+2}|\sigma_t) + E(mm_{t+1}p_{t+2}|\sigma_t) \qquad (2.7.42)\\
=& E(md_{t+1}|\sigma_t) + E(mm_{t+1}d_{t+2}|\sigma_t) + E(mm_{t+1}(E(md_{t+3}|\sigma_{t+2})+\\
& E(mp_{t+3}|\sigma_{t+2}))|\sigma_t)\\
=& E(md_{t+1}|\sigma_t) + E(mm_{t+1}d_{t+2}|\sigma_t) + E(mE(mm_{t+1}d_{t+3}|\sigma_{t+2})|\sigma_t)+\\
& E(mE(mm_{t+1}p_{t+3}|\sigma_{t+2})|\sigma_t)\\
=& E(md_{t+1}|\sigma_t) + E(mm_{t+1}d_{t+2}|\sigma_t) + E(mm_{t+1}m_{t+2}d_{t+3}|\sigma_t)+\\
& E(mm_{t+1}m_{t+2}p_{t+3}|\sigma_t) \qquad (2.7.43)
\end{aligned}$$

一般地，我们有

$$p_t = E(md_{t+1}|\sigma_t) + \sum_{s=2}^{\infty} E(mm_{t+1}\cdots m_{t+s-1}d_{t+s}|\sigma_t) \tag{2.7.44}$$

特别地，当资产是固定收益证券时，我们有

$$p_t = d_{t+1}E(m|\sigma_t) + \sum_{s=2}^{\infty} d_{t+s}E(mm_{t+1}\cdots m_{t+s-1}|\sigma_t) \tag{2.7.45}$$

由于时刻 t 时， SDF 因子 m 的条件期望的逆等于 1 与远期利率 $f_{t,t+1}$ 之和，我们有

$$p_t = \frac{d_{t+1}}{1+f_{t,t+1}} + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{d_{t+s}}{(1+f_{t,t+1})\cdots(1+f_{t,t+s})} \tag{2.7.46}$$

其中 $f_{t,t+s}$ 为时刻 t 时确定的从 t 到 $t+1$ 周期的利率水平，而支付的现金流在 $t+s$ 时刻发生。如果我们进一步假定远期利率为一常数 (即 $f_{t,t+s}=k$) 和 d_t 以一个增长常数 g 进行增长 (即 $d_{t+1}=(1+g)d_t$)，我们得到著名的 Gordon 公式

$$p_t = d_t \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(1+g)^s}{(1+k)^s} = \begin{cases} \dfrac{d_t}{k-g}, & \text{如果 } g<k \\ +\infty & \text{其他} \end{cases} \tag{2.7.47}$$

如果公司留存利润的比例为 γ_t，则我们有市盈率 (PE) 的 Gordon 公式表达式

$$PE_t = \frac{p_t}{E_t} = \begin{cases} \dfrac{1-\gamma_t}{k-g}, & \text{如果 } g<k \\ +\infty & \text{其他} \end{cases} \tag{2.7.48}$$

这指明由 Gordon 公式 给出的估值实际上是一个固定收入证券的“盈利”的一个乘数。一个直接的结论就是市盈率的变化与利率的变化成反比。

进一步，通过采用 Gordon 公式来进行股票估值时，需输入一个折现因子 k 的估计值， $k=$ 风险溢价 + 无风险利率，例如，如果无风险利率为 5%, 风险溢价为 6%, 增长率 g 为 10.5%, 分红留存比例 γ_t 为 50%, 则会产生一个非常不现实的“公平”估值 $PE_t = 50\%/(11\%-10.5\%) = 100$ 。换句话说， Gordon 估值公式已经考虑了盈利增长和货币的时间价值对股票估值的效果，但并没有正确地考虑风险溢价在估值中的作用。由 (2.7.44) 式，由于

$$\begin{aligned} & E(mm_{t+1}\cdots m_{t+s-1}d_{t+s}|\sigma_t) \\ =& E(d_{t+s}|\sigma_t)E(mm_{t+1}\cdots m_{t+s-1}|\sigma_t) + \mathrm{Cov}_t(d_{t+s}, mm_{t+1}\cdots m_{t+s-1}) \\ =& \frac{E(d_{t+s}|\sigma_t)}{(1+f_{t,t+1})\cdots(1+f_{t,t+s})} + \mathrm{Cov}_t(d_{t+s}, mm_{t+1}\cdots m_{t+s-1}) \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} p_t =& \sum_{s=1}^{\infty} \frac{E(d_{t+s}|\sigma_t)}{(1+f_{t,t+1})\cdots(1+f_{t,t+s})} + \\ & \sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{Cov}_t(d_{t+s}, mm_{t+1}\cdots m_{t+s-1}) \end{aligned} \tag{2.7.49}$$

同样，我们可以假定给定信息量 σ_t 条件股息 d_{t+s} 以一个常数 g 保持增长，$E(d_{t+s}|\sigma_t) = E(d_{t+s-1}|\sigma_t)(1+g)$, 并且远期利率保持不变，则得到

$$p_t = \frac{E(d_{t+1}|\sigma_t)}{k-g} + \sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{Cov}_t(d_{t+s}, mm_{t+1}\cdots m_{t+s-1}) \tag{2.7.50}$$

和风险调整下的市盈率为

$$PE_t = \frac{p_t}{E_t} = \frac{E(d_{t+1}/E_t|\sigma_t)}{k-g} + \sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{Cov}_t(d_{t+s}/E_t, mm_{t+1}\cdots m_{t+s-1}) \quad (2.7.51)$$

$$= \frac{E(d_{t+1}/E_t|\sigma_t)}{k-g} - RP_{PE} \quad (2.7.52)$$

其中 RP_{PE} 是具有随机股息 d_t 的资产的风险溢价:

$$RP_{PE} = -\sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{Cov}_t(d_{t+s}/E_t, mm_{t+1}\cdots m_{t+s-1}) \quad (2.7.53)$$

以下是由市盈率乘数给出的"公平"估值的几个结论:

1. 同样对于上述提到的确定性等价物 (CE) 的概念，基于像市盈率指标一样的倍乘估值方法是一种相对的 CE, 它由风险溢价进行折扣.

2. 仍然采用上述的例子，但证券市场给了 10 倍的市盈率估值，这说明相对于固定收入的 Gordon 公式的市盈率估值，由于投资者对盈利增长率 g 的大小和持久期限不确定，因此他们以一种打折的方式来买卖该风险资产，折扣率高达 $RP_{PE} = 100 - 10 = 90$.

3. 由 (2.7.52) 式, 我们可以看到即使假定盈利增长永远保持不变, 但风险溢价由于投资者的主观判断变化而变化. 例如，在 2004 年年末和 2005 年年初，虽然上市公司扬子石化的基本面和盈利增长数据在未来两三年中并没有预期发生变化，但证券市场给了扬子石化四倍的市盈率估值，甚至低于国际上石化板块股票的估值.

§2.7.3 期望收益和风险溢价的关系

一个经常混淆的概念就是投资收益 (Investment Return) 和风险溢价 (Risk Premium) . 令 p_0 为 $t=0$ 时刻股票的现价， p_1 为未来 $t=1$ 时刻的市场价格 (在 $t=0$ 时 p_1 是未知的), d_1 为 $t=1$ 时刻付的分红，则期望收益 k 定义为

$$k = \frac{d_1 + p_1}{p_0} - 1 \text{ 或等价地 } p_0 = \frac{d_1 + p_1}{1+k} \quad (2.7.54)$$

人们通常将 k 视为一个风险溢价或折现率 (Discount Ratio) . 但事实上，这样做产生了很大的混乱. 首先我们知道能产生 $R = 20\%$ 投资收益当然要比产生 $k = 10\%$ 投资收益的股票要好，如果两者等价，则风险溢价为 20% 的股票比风险溢价为 10% 的股票的现价要低，因为前者风险更大，但现实中前者股票的估值却可能比后者低，因而具有更大的安全边际. 理解这个问题的关键是要接受

股票投资的事实： p_0 和 p_1 均是 CE, 而不像债券投资那样， p_0 是 CE, 但 p_1 和 d_1 均是事先确定好的现金量. 因此对于股票投资来讲，期望收益 k 不是风险溢价，但是历史期望收益时间序列构成了未来风险溢价的统计估计均值。

下面证明以上论断。令 V_t 为一个 “虚拟” 的在时刻 t 有着无限期限确定性现金流的 “无风险” 现值. 但由于现实的股票在未来无限期限的现金流 (分红) 是不确定的，因此风险厌恶的投资者不会同意以价格 V_t 来买卖该股票，而同意以比 V_t 低的价格 p_t 来进行交易，即投资者要求对未来现金流的不确定性进行补偿，其差距就是折扣因子 δ_t 和风险溢价 k_t, 即我们有 $p_t = \delta_t V_t = \dfrac{V_t}{1+k_t}$ 。假定 “无风险” 现值 V_t 的增长率为 g, 即 $V_1 = V_0(1+g)$. 因此我们得到三个方程：

$$p_0 = V_0\,\delta_0, \quad p_1 = V_1\,\delta_1 = V_0(1+g)\delta_1, \quad p_0 = \frac{d_1 + p_1}{1+k}$$

将上述三个方程结合得到一个方程：

$$\delta_0(1+k) = \frac{d_1}{V_0} + (1+g)\delta_1$$

因此

$$\begin{aligned} k =& \frac{d_1}{V_0}\frac{1}{\delta_0} + (1+g)\frac{\delta_1}{\delta_0} - 1 \\ =& \frac{d_1}{p_0} + (1+g)\frac{1+k_0}{1+k_1} - 1 \end{aligned}$$

这样获得一个关于期望收益的公式：

$$k = \frac{d_1}{p_0} + g + \frac{1+g}{1+k_1}(k_0 - k_1) \tag{2.7.55}$$

因此我们有如下的结论：

1. 一个周期的投资期望收益等于周期开始时刻的风险溢价和周期结束时刻的风险溢价之差加上基本面价值的增长率再加上股息收益率.

2. 在该投资周期，如果投资者对风险溢价的要求没有发生变化 (换句话说, $k_1 = k_0$), 则投资者可以通过上市公司本身价值的增加获得投资收益，此时 $k = \dfrac{d_1}{p_0} + g$, 这就是针对蓝筹股票投资的典型情形. 在该投资周期，由于公司的经营状况良好和公司治理结构稳定，因此投资者不论在投资开始时还是结束时，均未改变对该股票的风险溢价水平的要求. 例如，一直坚持市盈率在 10 倍左右均是合理的估值，但由于公司基本面的成长性、公司盈利增加、公司的价值增加，因此投资者通过长期持有该股票将获得公司基本面成长性带来的投资收益. 这

是真正的价值投资和成长投资最关键的支撑点之一，其中成长投资特别强调 g 的重要性。当然，市场常常是错误地定价。因此，价值投资还可能获得修正市场错误的风险溢价 k_0 和 k_1 带来的另一份投资收益。

图 2.17 描述了上述的推断。

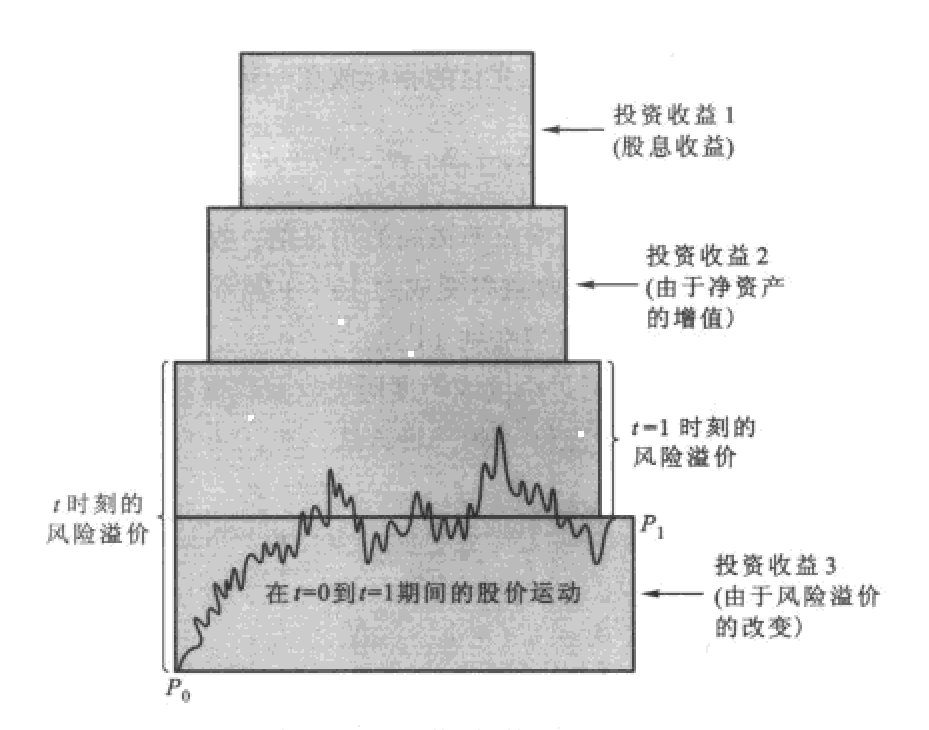


图 2.17 期望收益和风险溢价的关系

注：总投资收益 = 投资收益 1 + 投资收益 2 + 投资收益 3

在 $t=0$ 和 $t=1$ 时刻之间的风险溢价差别 k_0-k_1 可以被理解成该投资周期的一个单位的风险溢价，我们记为 γ 。因此，我们有

$$\gamma=\frac{1}{\beta}(k-y-g) \tag{2.7.56}$$

其中，股息收益率 $y=\dfrac{d_1}{p_0}$ 和 $\beta=\dfrac{1+g}{1+k_1}$. 通过上式，我们可以看出人们为什么有时有意识地或无意识地混淆风险溢价和期望收益的概念。但是我们必须记住的一点是它们确实代表了两个根本不同的概念。风险溢价越低，资产的理性现值就估计得越高。因为投资者认为风险不大，所以愿意在较高的价格上购买该股票。风险溢价越高，资产的理性现值就估计得越低。因为投资者认为该股票的风险很大，如 ST 股票，因此只愿意在较低的交易价格上考虑购买该股票。越高的投资收益并不意味着越高的风险溢价，二者之间没有一个直接线性关系。投资组合理论也告诉我们在有较高投资期望收益的股票上进行更多的投资，但

并没有告诉我们在高风险溢价的股票上进行较高配置．一个周期高投资收益可以通过降低风险溢价或者通过如改变股息收益率和增加净资产等改善上市公司基本面的途径来获得．例如，某上市公司股息收益率降低 5%(公司为了支持未来更大的经营扩张，留存了更多的利润没有分红给投资者)，增长率增加 40%, 并且由于公司基本面的改善，投资者对公司的未来变得更加乐观，从而对风险溢价的要求降低 10%．将以上变化的指标放在一起，则投资收益增长了

$$\Delta k = \Delta y + \Delta g + \Delta \gamma = -5\% + 40\% - 10\% = 25\%$$

假定在公司公布上述盈利增长率提高的消息前，投资者的期望收益为 15%, 一旦公布后，投资者的期望收益将变成为 $15\% + 25\% = 40\%$．如果当前的股价为 10 元，则投资者预期股价应涨到 14 元．

(2.7.56) 式提供了通过季度或年度历史收益数据、股息收益率数据、净资产成长性数据来估计风险溢价 γ 的一种方法．

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\beta_i} (k_i - y_i - g_i) \tag{2.7.57}$$

我们设置其中的参数 $\beta_i = 1, i = 1, \cdots, N$．

Tony Estep 1985 年和 2003 年给出关于期望收益的 T 模型

$$k = \frac{ROE - g}{PE} + g + \frac{\Delta PE}{PE}(1 + g) \tag{2.7.58}$$

其中，g 是净资产的增长比例，$\frac{ROE - g}{PE}$ 称为现金流收益率，$\frac{\Delta PE}{PE}$ 为估值变换，即 (2.7.56) 式中给出的风险溢价的一个间接估计．

注记 18 (基金经理的估值)　观察基金经理如何进行投资决策的过程是一个非常有趣的事情．首先他会通过各种方法来求证当前的股价是否合理，如，扬子石化 12 元、中集 30 元是高估还是低估？他会将公司经营的各种优势 (经济特许权) 折算成价值几元 (相对或绝对的)，公司的治理结构值几元等，或者采用相对坐标法，先给定某只股票的价格，如中国石化 4 元，然后将其他石化股的价值与中国石化进行比较，得出高估或低估的结论，甚至估算中国石化以低或高发行价进入 A 股市场的话，对其他石化股的估值又会有什么样的影响，等等．总之，不论采用哪种方法得出的估值依然是不确定的 (理论上经济学家将价值视为一种均衡态，将股价视为围绕这个价值变化的一个随机变量)，其不确定的大小完全是主观的，它与基金经理深入研究该股价后形成的自信

度密切相关。如果他发现市场严重低估并且他对该股已经非常了解，他会试图在该股建立很重的仓位；反之，如果他连该公司的盈利模式都搞不清楚的话，他可能会建很轻的仓位。因此我们可以发现通过自下而上的价值投资选股总是相对趋向于集中的投资，因为人的精力总是有限的，一段时间内只能完全搞清楚某几只股票的全部情况。

注记 19 (赌在风险厌恶) 一种全新的交易正受到华尔街对冲基金经理们的关注，它被称为逆 LTCM 交易。

罗格·洛温斯坦 (Roger Lowenstein) 在其巨著《天才们的陨落》中记载了 1998 年长期资本管理 (LTCM) 对冲基金的瓦解及其对全球市场稳定性的短暂威胁。当俄罗斯债券在 1998 年 8 月发生违约后，LTCM 基金陷入困境，这一事件令人记忆深刻。交易员们为了安全起见，纷纷回避任何被认为是风险高的资产，从而掀起了一股风险厌恶的浪潮。

在洛温斯坦看来，LTCM 的问题在于它"对全球的风险下注"。"在每次套利中，它会持有风险更高的资产；在每个国家，它持有信用级别最低的债券。它千百次地对同一结果打赌，如今，赌局输了"。

现在人们认为聪明的做法是进行正好相反的交易，对即将到来的风险厌恶新浪潮下注。LTCM 卖空较低风险的证券，买进相应的较高风险证券(那么当两种证券价差缩小时就能获利，价差扩大时则会亏损)，现在的操作思路则与上述做法完全相反。

由于存在一种被某对冲基金经理称为"过度忽略风险"的现象，因此，当前与 LTCM 崛起时期一样，全球市场存在许多机会。为了能从即将再度出现的风险厌恶氛围中获利(如果美国进入全面的萧条期，或者如果众多具有潜在危险的地缘政治局面中出现任何问题，那么这种风险厌恶氛围应该会再现)，需要对价差扩大下注。首先可以考虑新兴市场。许多新兴市场面临加剧的政治风险。然而，根据摩根公司的报道，新兴市场债券比美国国债的收益率高出不到 200 个基点，利差处于历史较低水平。高收益或"垃圾"债券与国债之间的利差也很低。

然后可以尝试资产支持证券。根据风险水平的不同，抵押资产组合被划分为不同的类别。对冲基金经理们称，风险最高的美国类资产 (当美国房地产市场下跌时，该类资产的风险确实非常高)，其收益率比最安全资产高出不到 150 个基点。

§2.8　总结

在这一章中，我们重点引入了价值的经济学原理，即边际效用和边际效用比；其次我们将其原理应用于未来不确定状态下的边际效用，引入最重要的 AD 证券以及风险交换的价值原理和风险溢价的概念。



第3章

估值的金融学原理 —— 如何估值？

§3.1 无套利理论 —— 金融学基本定理

无套利是金融经济学中一个极其重要的概念，是资产定价和估值中最为常用的假设前提.无套利假设建立在关于人类行为最基本看法和信念的基础之上，即人是不满足的，在相同条件下，个体会偏好更多的财富．无套利也是金融市场均衡的必要条件．因为如果存在套利机会，投资者会利用该机会进行交易，从而引起金融资产的需求和供给发生变化，这与市场均衡矛盾．

无套利的一种特殊表现形式是一价定律，它是远期汇率平价理论的基础．如果未来支付相同的资产具有相同的价格，那么一价定律成立．下面我们以国际金融中常用的一个例子来说明一价定律．假设市场上即期汇率为 1 美元 = s 欧元，一年期远期汇率为 f 欧元 / 美元，如果一价定律成立，则在即期、远期汇率和欧元以及美元利率之间存在某一特定关系．

假设某投资者进行了如下一系列交易．首先，该投资者以利率 r 贷出 1 美元，1 年后得到的本金和利息收入之和为 $(1+r)$ 美元．然而，投资者希望到时能拥有一定数量的欧元以满足其支付要求．为此，他通过签订远期合约来规避汇率风险．既然当前一年期远期汇率为 f 欧元 / 美元，远期合约确保投资者在 1 年以后能得到 $(1+r)f$ 欧元．一年后的这一收入，可以用于偿还当前一定量的欧元借款．记欧元利率为 r_e，则他当前能借的欧元数量为

$$\frac{(1+r)f}{1+r_e}$$

最后，既然即期汇率为 s 欧元 / 美元，上述欧元借款可转换成

$$\frac{(1+r)f}{(1+r_e)s}$$

美元．如果此结果不等于投资者最初的 1 美元贷出量，那么以上贷出美元，借入欧元，并通过即期和远期汇率转换货币的循环过程中就存在套利．因而，一价定律作为无套利的特殊情况，要求

$$(1+r)f=(1+r_e)s$$

即贷出 1 美元，并通过远期外汇市场实现 1 年后确定的欧元收入的决策等价于在外汇现货市场买入欧元并以欧元利率贷出的决策．

上述例子说明了无套利假设在外汇市场中的最简单应用，但它并没有完全描述无套利的含义以及消除套利的机制．事实上，并不是所有的套利机会所涉及的两种头寸都会有相同的现金流．如果可以构建两个成本相同的头寸，使得其中一个头寸在任何情况下比另一个有更多的现金流，则意味着存在套利机会．后文中，我们的分析也适用此种套利机会．

为了简单以及表述上的方便，下面我们重点考虑单期模型，但所得的结果非常一般，同样适用于跨期经济．假设投资者在当前 (时刻 0) 做出决策，在未来 (时刻 1) 得到支付，在时刻 0 和时刻 1 之间没有任何事情发生，所有的决策都是在时刻 0 做出的．

我们用状态空间 Ω 描述经济中的不确定性，Ω 中的每个元素表示一个自然状态．为了数学上的简便，假设只存在有限个可能的自然状态：

$$\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_m\}$$

状态空间 Ω 列出了 m 个可能出现的互斥的状态．也就是说，在时刻 1，不确定性会消失，一定会且仅会出现这 m 个状态中的一个．

假设存在有限个 (n 个) 可交易的资产，其价格向量为

$$\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_n)$$

令

$$\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}$$

表示 n 个资产构成的套利组合．$\boldsymbol{\eta}$中的任一元素 η_i 表示在第 $i(i=1,\cdots,n)$ 个资产上的投资额．该套利组合的成本为

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{\eta}=\sum_{i=1}^{n}p_i\eta_i$$

如果一个组合 $\boldsymbol{\eta}$的成本非正，即

$$\boldsymbol{p\eta} \leqslant 0$$

则称组合 $\boldsymbol{\eta}$为套利组合.

我们用

$$\boldsymbol{G} = (g_{ij}) = (\text{状态}\omega_i\text{发生时，证券 } j \text{ 的支付})$$

来代表 n 个证券的支付. 矩阵 $\boldsymbol{G}$中，行表示自然状态，列表示证券. 矩阵 $\boldsymbol{G}$的每一行给出了 n 个证券在某特定状态下的支付，每一列则表示某特定证券在所有可能状态下的支付.

定义 3.1.1 如果一个套利组合具有非负的支付, 且至少在一个状态下的支付为正，则存在套利机会. 数学上，称组合 $\boldsymbol{\eta}$是一个套利机会，如果它满足

$$\boldsymbol{p\eta} \leqslant 0$$

以及

$$\boldsymbol{G\eta} > \boldsymbol{0}$$

而且要么第一式中不等号至少对一个元素严格成立，要么第二个不等式严格成立[①].

为了简化上述关于无套利的概念和定义，我们定义矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{G} \end{pmatrix}$$

定义 3.1.2 称组合 $\boldsymbol{\eta}$是一个套利机会 , 如果它满足

$$\boldsymbol{A\eta} > \boldsymbol{0}$$

无套利的正式定义如下:

定义 3.1.3 无套利 (NA) 原理可表示为

$$\{\boldsymbol{\eta} | \boldsymbol{A\eta} > \boldsymbol{0}\} = \varnothing$$

即不存在套利组合.

---

① "$\geqslant$" 表示向量的每个元素都大于或等于, "$>$" 表示 $\geqslant$ 成立且至少有一个元素大于, "$\gg$" 表示每个元素都大于.

以上定义从数学上刻画了金融市场上不存在套利机会时的情况.简单地说,无套利指的是在没有任何当前支付的条件下,通过在市场中买卖可交易的资产不能获得确定的利润.在未来任何状态下都有正收益的资产组合,在目前一定具有正的成本。根据无套利的定义,我们能够得出并证明金融学基本定理.

金融学基本定理 如下三种表述是等价的:

1. 无套利;

2. 存在一个正的线性定价规则,它能够对所有资产定价;

3. 对某个多少财富也不满足的经济代理人而言,存在一个最优需求。

证明:详细的证明请参见 Dybvig 和 Ross(1987) . 我们只概述证明的大致思路. 线性定价规则 $\boldsymbol{q}$是一个线性算子,它依据资产的支付对资产定价。在有限维的情况下,线性定价规则是许多对偶空间 $\mathbf{R}^m$. 正的线性定价规则即要求 $\boldsymbol{q} \gg \mathbf{0}$. 如果 $\boldsymbol{q}$使得下式成立,

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{G}$$

则说明 $\boldsymbol{q}$能够对市场上的所有资产定价.

我们首先说明正的线性定价算子排除无套利 (机会) . 反设 $\boldsymbol{\eta}$是一个套利机会. 显然有

$$0 \geqslant \boldsymbol{p}\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{q}\boldsymbol{G})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{\eta})$$

由于 $\boldsymbol{q} \gg \mathbf{0}$, 上式要成立,必须有

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{\eta} < \mathbf{0}$$

这与套利矛盾.

接下来,我们说明无套利能推出存在正的线性定价算子 $\boldsymbol{q}$. 定义净交易集

$$S = \{\boldsymbol{x} | \exists \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}\}$$

注意到 S 与正轴的任何交点都表明存在套利,因此,无套利等价于 S 不与正轴相交。由于 S 为凸集,由分离超平面定理可得,存在 $\boldsymbol{y}$, 它将 S 和正轴 $\mathbf{R}^+$ 分离开来。由

$$\boldsymbol{y}\mathbf{R}^+ > 0$$

可知, $\boldsymbol{y} \gg \mathbf{0}$. 类似地,对所有 $\boldsymbol{\eta}$, 我们有

$$\boldsymbol{y}S \leqslant 0 \Rightarrow \boldsymbol{y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta} \leqslant 0 \Rightarrow \boldsymbol{y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta} = 0$$

上式中，最后一步推导基于如下论断：如果 $\boldsymbol{yA\eta} < 0$, 那么 $\boldsymbol{yA}(-\boldsymbol{\eta}) > 0$, 这与 $\boldsymbol{yA\eta} < 0$ 对任意组合都成立相矛盾，所以有 $\boldsymbol{yA\eta} = 0$ 。定义

$$\boldsymbol{q} = (q_1, \cdots, q_m) = \frac{1}{y_1}(y_2, \cdots, y_{m+1})$$

则

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{qG}$$

可见，$\boldsymbol{q}$就是我们要求解的对市场上所有资产定价的线性定价算子.

将无套利和经济人的最优化问题联系起来则更为直接，且更具构造性. 由于任何经济人在进行最优化时，希望能以任意大的规模利用套利机会，于是存在套利与有限需求矛盾. 相反，给定无套利，我们能找到一个线性定价规则 $\boldsymbol{q}$, 并用其来定义 NM 期望效用最大化者的边际效用，因此，能构造一个单调凹函数，使其最大值是有限的. □

现代金融学中，经常涉及的问题是不确定条件下个体的动态决策. 此时，通常用随机扩散过程或二叉树之类的离散过程来刻画金融变量的变化. 然而，我们前面关于金融学基本定理的简单叙述在此情况下可能并不适用. 虽然定理能够被扩展到无穷维空间，但还是会出现问题. 如果数学上对资产定价的算子不能用不同状态下财富的价格向量表示，那么通常的经济分析会存在问题. 为解决该问题，我们需要用到市场的完备性条件.

一个 *完备市场*(Complete Market) 是指，对每个状态 ω_i, 都存在可交易资产的组合，其支付与纯未定状态权益相同. 这里，纯未定状态权益指的是支付为单位向量的证券：在某一特定状态的支付为 1, 在其余状态的支付为零. 在完备市场中，$\boldsymbol{G}$是一个行全秩矩阵，方程

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{qG}$$

有唯一解

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{pG}^{-1}$$

这决定了为什么完备性是金融市场的一个重要属性. 相比较而言，在非完备市场中，正的定价算子是不能被确定的，在我们设定有 m 个状态 n 个证券的情况下，如果 $m > n$, 算子将是 $m - n$ 维子空间中的一个元素.

§3.2 表示定理

在基本定理中，对所有资产定价的正线性算子有几种重要的表现形式，这使得我们可以对定理本身做不同的表述。

定义 3.2.1 称概率集 π^* 是鞅或风险中性概率，如果它使得具有支付

$$\boldsymbol{z} = (z_1, \cdots, z_m)^{\mathrm{T}}$$

的任何资产的价值都等于以相应的无风险利率折现的期望支付的折现值，即

$$V(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{1+r}E^*(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{1+r}\sum \pi_i^* z_i$$

定义 3.2.2 状态价格密度或定价核是一个向量，

$$\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \cdots, \phi_m)$$

使得任何资产的价值由下式给定

$$V(\boldsymbol{z}) = E(\boldsymbol{\phi z}) = \sum \pi_i \phi_i z_i$$

上述定义使我们能对基本定理做出不同的表述。

基本定理 下列表述等价：

1. 存在正的线性定价规则；
2. 鞅性质：存在正的风险中性概率和相应的无风险利率；
3. 存在正的状态价格密度或定价核。

证明： $1 \Leftrightarrow 2$。

由定理条件知道，存在正的定价向量 $\boldsymbol{q} \gg \mathbf{0}$，使得

$$V(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{qz}$$

首先对 q_i 求和

$$V(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{qe} = \sum q_i$$

其中 $\boldsymbol{e}$为 1 向量，由于其在每个状态下的支付都为 1，因此 $V(\boldsymbol{e})$ 表示得到 1 美元确定性支付的价值，即无风险资产的价值。定义 r 为该证券的收益率

$$r = \frac{1}{V(\boldsymbol{e})} - 1$$

或

$$V(\boldsymbol{e}) = \frac{1}{1+r} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{e} = \sum q_i$$

注意到如果市场上有无风险资产的显性或隐性 (由市场上的资产组合能复制出$\boldsymbol{e}$表示的支付) 交易，上面定义的 r 是唯一的。

定义风险中性概率为

$$\pi_i^* = \frac{q_i}{\sum q_i} > 0$$

注意到 π_i^* 之和为 1, 符合概率的基本要求。因此，我们有

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{z}) &= \sum q_i z_i = (\sum q_i) \sum \left(\frac{q_i}{\sum q_i}\right) z_i \\ &= \frac{1}{1+r} \sum \pi_i^* z_i = \frac{1}{1+r} E^*(z) \end{aligned}$$

其中， E^* 表示在风险中性概率下的期望。

反过来，如果存在一正的风险中性概率集以及相应的无风险利率 r, 显然，在 $\mathbf{R}^m$ 空间存在一个正的线性算子，我们仅需定义状态空间价格向量的分量为

$$q_i = \frac{1}{1+r} \pi_i^* > 0$$

1⇔3 .

考虑 1⇒3 . 定义正的状态密度为

$$\phi_i = \frac{q_i}{\pi_i} > 0$$

我们有

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{z}) &= \sum q_i z_i = \sum \pi_i \left(\frac{q_i}{\pi_i}\right) z_i \\ &= \sum \pi_i \phi_i z_i = E(\phi \boldsymbol{z}) \end{aligned}$$

反过来 3⇒1 也成立。 □

§3.3 套利定价理论

套利定价理论 (APT) 直接来自于表示定理 (见 Ross,1973,1976) . 它以简单的事实为前提条件：如果人们想比仅仅从套利角度获得更多的关于资产收益

的信息，就必须对收益的分布做出假定．下面，我们假设收益服从一个简单的线性模型：

$$x_i = E_i + \beta_i f$$

其中，f 是影响所有资产收益的一个共同因素 (或因素向量)，β_i 是贝塔 (Beta) 值或者称为资产 i 在因素上的载荷．向量 f 刻画了影响所有资产收益的关于状态变量的新信息，数学上，在静态情形下，这等价于对收益矩阵的秩限制．

由于所有资产是完全相关的，在单因素情况下，无套利原理能够对资产定价．事实上，这与用二叉树对期权定价的思路相同．既然对任何资产单位投资的支付等于资产的总收益，那么任何总收益的价值必须为 1，即

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{1+r}E^*(1+x_i)\\ &= \frac{1}{1+r}(1+E^*(E_i+\beta_i f))\\ &= \frac{1+E_i+\beta_i E^*(f)}{1+r}\end{aligned}$$

整理上述方程，我们得到了熟悉的风险溢价的表达形式，即证券市场线

$$E_i - r = -E^*(f)\beta_i = \pi_f \beta_i$$

其中

$$\pi_f \equiv -E^*(f)$$

从证券市场线可知，π_f 是 β 为 1 的资产的风险溢价，

$$\pi_f = E_f - r$$

其中 E_f 为任何 β 值为 1 的组合的预期收益．于是，证券市场线能重写为通常的形式

$$E_i - r = (E_f - r)\beta_i$$

也就是说，资产的风险溢价取决于描述该资产与其他资产相关性的 β 和因子的溢价 π_f．

在实际应用中，上述结果的具体形式显得过于刻板，因为除期权定价和衍生证券外，股票等资产之间并不是完全相关的，且其收益率易受到异质性因素的影响．我们通过改变收益率产生机制来反映这一情况：

$$x_i = E_i + \beta_i f + \epsilon_i$$

其中 ϵ_i 代表公司或行业等异质性因素对资产 i 收益的影响．如果异质项相互独立（当一个高度多样化的投资组合中资产数目增加时，由大数定律可知异质项渐近独立），投资组合的收益接近原来的确切结果．这一论断表明 SML 只是近似成立。

尽管 APT 的直觉很明显，即市场的外生因素改变收益且影响定价，我们也能用相对于因素具有单位载荷的组合等内生变量来表示这些因素，但 APT 并没有指定这些因素到底是什么．接下来，我们讨论投资组合理论和如何评估一个资产定价模型．

§3.4 投资组合理论

§3.4.1 组合的有效性前沿和两基金分离定理

设有 N 只证券 (Securities)，其市值分别为 $MV_1, \cdots, MV_N$ ．设整个组合的总市值为 MV，我们定义投资比例 (或称为头寸比例)

$$w_1 = \frac{MV_1}{|MV|}, \cdots, w_N = \frac{MV_N}{|MV|} \tag{3.4.1}$$

其中 $|\cdot|$ 为绝对值 (下面的例子将说明取绝对值的习惯)，定义头寸向量 ①

$$\boldsymbol{w} = (w_1, \cdots, w_N) \tag{3.4.2}$$

令 R_i 为第 i 只证券的投资收益 (是一个随机变量)，$E(R_i)$ 为第 i 只证券的预期收益，σ_i^2 为第 i 只证券的收益的方差，$\sigma_{i,j}$ 为第 i 只证券和第 j 只证券之间的协方差．组合的投资收益为

$$R_p = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i \tag{3.4.3}$$

例 3.4.1 多头组合的投资收益，若

$$N = 2,\ \ w_1 = 40\%,\ \ w_2 = 60\%,\ \ R_1 = 10\%,\ \ R_2 = 20\%$$

① 在前面的经济学分析中，我们称 w_i 为投资者对风险资产 R_i 的需求量．

则组合的投资收益为

$$R_p = 40\% \times 10\% + 60\% \times 20\%$$
$$= 4\% + 12\% = 16\%$$

例 3.4.2 对冲组合的收益:

多头 (Long) 12 月铜期货 100 手 (价格 25 770 元)

空头 (Short) 12 月铝期货 200 手 (价格 17 720 元)

$$\text{铜保证金} Margin_{\text{铜}} = 100 \times 5 \times 0.08 \times 25\,770 = 103.08(\text{万元})$$

$$\text{铝保证金} Margin_{\text{铝}} = 200 \times 5 \times 0.06 \times 17\,720 = 106.32(\text{万元})$$

因此组合的净资产值 (Net Asset Value) 为

$$NAV = Margin_{\text{铜}} + Margin_{\text{铝}} = 209.4(\text{万元})$$

但铜多头的市值为

$$MV_{\text{铜}} = 100 \times 5 \times 25\,770 = 1\,288.5(\text{万元})$$

铝空头的市值为

$$MV_{\text{铝}} = -200 \times 5 \times 17\,720 = -1\,772(\text{万元})$$

因此组合的市值为

$$MV = MV_{\text{铜}} + MV_{\text{铝}} = -483.5(\text{万元})$$

头寸比例为

$$w_{\text{铜}} = \frac{1\,288.5}{483.5} = 266.49\% \text{ 和 } w_{\text{铝}} = \frac{-1\,772}{483.5} = -366.49\%$$
$$w_{\text{铜}} + w_{\text{铝}} = -100\%$$

如果铜期货的投资收益为 10%(铜价上涨 10%), 铝期货的投资收益为 −10%(铝价下跌 10%), 则组合的投资收益为

$$R_p = 10\% \times 266.49\% + (-10\%) \times (-366.49\%) = 63.298\%$$

给定投资时间区间, 并且假定只能在期初做投资决策, 则每只证券的区间收益是我们不能控制的随机变量. 但我们可以通过调整各个头寸比例来控制组

合的收益和风险，这样我们可以形成风险最小化和收益最大化的曲线，沿着这条曲线，我们将会看到一些特殊的金融性质.

定义 3.4.1 组合的有效性前沿 是指那些组合权重向量的集合满足给定组合预期收益水平下最小化组合风险的权重向量，或者给定组合风险水平下使得组合收益最大化的权重向量. 不论以上哪种情形，我们均假定组合的权重之和为 1 .

如何获得组合的有效性前沿是一个数学的优化问题

$$\min_{w_1,\cdots,w_N}\{\mathrm{Var}(R_p)\} \tag{3.4.4}$$

满足

$$E(R_p)=\mu \tag{3.4.5}$$

和

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 100\% \tag{3.4.6}$$

其中 μ 是事先设定的组合预期收益水平。这样我们得到

$$\min_{\boldsymbol{w}}\{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}\} \tag{3.4.7}$$

满足

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}E(\boldsymbol{R})=E(R_p)=\mu \tag{3.4.8}$$

和

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{1}=1 \tag{3.4.9}$$

其中 $E(\boldsymbol{R})=(E(R_1),\cdots,E(R_N))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{w}=(w_1,\cdots,w_N)^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{1}=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,$N\times N$ 协方差阵 $\boldsymbol{\Sigma}=(\sigma_{i,j})$.

定义拉格朗日算子

$$L=\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}+\lambda(1-\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w})+z(\mu-\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}E(\boldsymbol{R})) \tag{3.4.10}$$

$$\mathbf{0}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}}=\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}-\lambda\mathbf{1}-zE(\boldsymbol{R})$$

获得最优头寸

$$\boldsymbol{w}^{*}=\lambda\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}+z\boldsymbol{\Sigma}^{-1}E(\boldsymbol{R}) \tag{3.4.11}$$

将上式代入 (3.4.5) 和 (3.4.6) 式，求解 λ 和 z 得到

$$\lambda=\frac{C-\mu B}{\Delta},\qquad z=\frac{\mu A-B}{\Delta} \tag{3.4.12}$$

其中

$$
\begin{aligned}
A &= \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} \\
B &= \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}E(\boldsymbol{R}) \\
C &= (E(\boldsymbol{R}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}E(\boldsymbol{R}) \\
\Delta &= AC - B^2 > 0
\end{aligned}
\tag{3.4.13}
$$

当 $\boldsymbol{\Sigma}$为对角阵时， A 为方差逆之和，哪个证券的风险越小，则对 A 的值贡献越大。

$$
A = \frac{1}{\sigma_1^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_N^2}
$$

$$
C = S_1^2 + \cdots + S_N^2
$$

其中

$$
S_1 = \frac{E(R_1)}{\sigma_1}, \cdots, S_N = \frac{E(R_N)}{\sigma_N}
$$

将 (3.4.12) 式代回到 (3.4.11) 式，得到当 $w = w^*$ 时，

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w} \\
&= \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}(\lambda\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} + z\boldsymbol{\Sigma}^{-1}E(\boldsymbol{R})) \\
&= \lambda\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{1} + z\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}E(\boldsymbol{R}) \\
&= \lambda + z\mu
\end{aligned}
$$

由 (3.4.12) 式，得

$$
\sigma^2 = \frac{A\mu^2 - 2B\mu + C}{\Delta} \tag{3.4.14}
$$

由上式我们可以得到关于组合收益 μ 和组合风险 σ 的方程

$$
\frac{\sigma^2}{\dfrac{1}{A}} - \frac{\left(\mu - \dfrac{B}{A}\right)^2}{\dfrac{\Delta}{A^2}} = 1
$$

在均值一标准差平面上，此方程为双曲线，其中的一条渐近线为

$$
\begin{aligned}
\mu &= B/A + \sigma\sqrt{\Delta/A} \\
&= a + b\sigma
\end{aligned}
$$

沿着组合的有效性前沿，随着标准差 σ 的增大，组合收益 μ 和组合风险 σ 越来越接近于线性关系，即人们常说的高风险高回报，低风险低回报，或者换一种说法，沿着组合的有效性前沿，风险是由标准差来测量的。当一个组合不在前沿时，其风险是由协方差来测量的，这构成了风险预算的基础，见图 3.1 的表示。

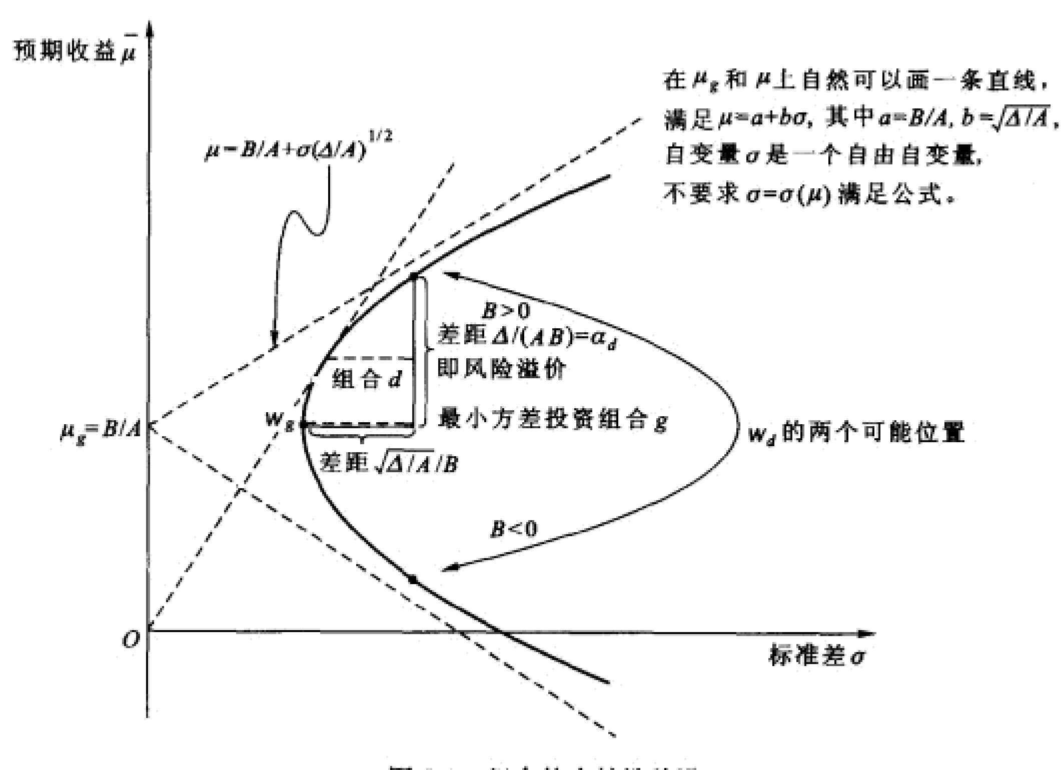


图 3.1 组合的有效性前沿

特别地，在有效边界上，两个组合的风险之差为 $\sigma_2-\sigma_1=b^{-1}(\mu_2-\mu_1)$，即风险溢价的概念与波动性的大小反映的风险概念是一致的。

其次，沿着组合的有效性前沿，全局最小组合风险的组合权重 w_g 的组合预期收益如下给出：

$$0=\frac{\mathrm{d}\sigma^2}{\mathrm{d}\mu}=\frac{2A\mu-2B}{\Delta}$$
$$\mu=B/A \tag{3.4.15}$$

由 (3.4.12) 式得到

$$\lambda=\frac{C-B^2/A}{\Delta}=\frac{AC-B^2}{A\cdot\Delta}=\frac{1}{A}$$

和

$$z=\frac{(B/A)\cdot A-B}{A}=0$$

由 (3.4.11) 式，我们得到全局最小风险的组合权重为

$$\boldsymbol{w}_g = \frac{1}{A}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} \tag{3.4.16}$$

记另一个最优的组合

$$\boldsymbol{w}_d = \frac{1}{B}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}E(\boldsymbol{R})$$

由 (3.4.12) 式得到任意一个最优组合有一个线性表达

$$\boldsymbol{w}^* = (\lambda A)\boldsymbol{w}_g + zB\boldsymbol{w}_d \tag{3.4.17}$$

由 (3.4.12) 和 (3.4.13) 式可知 $\lambda A + zB = \dfrac{AC - B^2}{\Delta} = 1$, 所以

$$\boldsymbol{w}^* = a\boldsymbol{w}_g + (1-a)\boldsymbol{w}_d$$

其中 $a = \lambda A$ 。这样我们得到著名的两基金分离定理.

§3.4.2 一般投资组合的定义

假设回报空间 X 为希尔伯特空间，内积为随机变量的二阶矩，我们先介绍有关收益的一些基本定义.

定义 3.4.2 收益率超平面 X 为回报空间， $\forall y \in X, p(y)$ 为 X 上定价函数， m 为其对应的随机折现因子，则收益率定义为

$$r_y = y/E(my)$$

因为 X 为 H 空间，故 $r_y \in X$, 且其特征在于 $p(r_y) = 1$, 因此我们可以定义收益率超平面为

$$R = \{r \in X | p(r) = 1\}$$

定义 3.4.3 超额收益子空间 X 为回报空间， $\forall y \in X, p(y)$ 为 X 上定价函数， m 为其对应的随机折现因子，因此我们定义超额收益子空间为

$$R_e = \{r_e \in X | p(r_e) = 0\}$$

或

$$R_e = \{r_e \in X | r_e = r_1 - r_2, \forall r_1, r_2 \in R\}$$

R 可以看作是 R_e 的一个平移,

$$\forall r_1, r_2 \in R, \quad r_1 - r_2 \in R_e, \quad R = R_e + r_1$$

R_e 是一个线性子空间,

$$\forall r_1, r_2 \in R_e,\ ar_1 + br_2 \in R_e,\ a, b \in \mathbf{R}$$

而 R 是一个仿射集,

$$\forall r_1, r_2 \in R,\ ar_1 + br_2 \in R,\ a + b = 1$$

§3.4.3 均值方差有效的三种表述的统一

定义 3.4.4 均值方差前沿上的回报 假定 X 是一个回报空间, $x \in X$ 称为有效前沿上的回报当且仅当没有其他的回报与 x 具有相同的期望和价格，却具有更小的方差. 也就是说在给定价格和期望的条件下，有效前沿的回报具有最小的方差.

定义 3.4.5 均值方差有效的收益率 假定 X 是一个回报空间, R 为 X 内的收益率超平面, $r \in R$ 称为均值方差有效的收益，如果 r 在所有期望相同的收益中方差最小. 显然，在线性定价下，均值方差前沿上回报对应的收益率都是均值方差有效的.

假定 X 为回报空间, R 为其内的收益率超平面, R_e 为超额收益子空间, m 为 X 内的随机折现因子, 1_x 为常数 1 在回报空间 X 内的模拟组合，本章中均假设 1_x 与 m 不共线. 当前关于均值方差有效前沿的定理存在如下三种表述. 我们将证明它们的等价性。

在此我们先给出几个定义式:

$$r_m = \frac{m}{p(m)} = \frac{m}{E(m^2)}$$

$$1_e = \mathrm{Proj}(1|R_e) = \hat{E}(1|R_e)$$

引理 3.4.1 r_{mv} 在收益率有效前沿上，当且仅当

$$r_{mv} = r_m + \omega 1_e \tag{3.4.18}$$

对于某实数 ω 成立.

引理 3.4.2 r_{mv} 在收益率有效前沿上，当且仅当

$$r_{mv} = (1-\beta) r_m + \beta r_{1_x} \tag{3.4.19}$$

其中

$$r_m = \frac{m}{E(m^2)}, \quad r_{1_x} = \frac{1_x}{E(m)}$$

1_x 为常数 1 在回报空间的模拟组合.

引理 3.4.3 x 为 X 内均值方差有效的回报, 当且仅当

$$x = \alpha m + \beta 1_x \tag{3.4.20}$$

其中 α 和 β 为实数.

定理 3.4.1 假设一切定义如前, 均值方差有效前沿三种表述是等价的.

证明: 先证明引理 3.4.1 和引理 3.4.2 的等价性.

$$r_{1_x} = \frac{1_x}{E(m1_x)} = \frac{1_x}{E(m)}$$

又由 m 和 R_e 的正交性, 可得

$$\begin{aligned} 1_x =& \hat{E}(1|m) + \hat{E}(1|R_e) \\ =& \frac{E(m)}{E(m^2)} m + 1_e \\ r_{1_x} =& \frac{m}{E(m^2)} + \frac{1_e}{E(m)} \\ =& r_m + \frac{1}{E(m)} 1_e \end{aligned}$$

故 (3.4.18) 和 (3.4.19) 式等价的充分必要条件是

$$\beta = \omega E(m)$$

再证引理 3.4.3 和引理 3.4.2 的等价性.

$$\begin{aligned} r_x =& \frac{\alpha m + \beta 1_x}{p(x)} \\ =& \frac{\alpha E(m^2)}{p(x)} r_m + \frac{\beta E(m)}{p(x)} r_{1_x} \end{aligned}$$

显然

$$p(x) = \alpha E(m^2) + \beta E(m)$$

故 (3.4.19) 和 (3.4.20) 式等价.

综合可得以上三种有效前沿的引理完全一致. □

展示了三种描述的等价性以后, 我们挑选引理 3.4.3 来证明其均值方差有效性.

引理 3.4.3 的证明: 对任意回报 x, 对其实行正交分解使得

$$x = \alpha m + \beta 1_x + \epsilon$$

其中 $E(m\epsilon)=0, E(1_x\epsilon)=0$，即 ϵ 正交于 m 和 1_x，显然 ϵ 具有零价格和零期望，可得

$$\text{Cov}(\alpha m+\beta 1_x,\epsilon)=E((\alpha m+\beta 1_x)\epsilon)-E(\alpha m+\beta 1_x)E(\epsilon)=0$$

进一步得

$$\text{Var}(x)=\text{Var}(\alpha m+\beta 1_x)+\text{Var}(\epsilon)$$

同时 x 和 $\alpha m+\beta 1_x$ 具有相同的期望和价格。故具有 $\alpha m+\beta 1_x$ 形式的回报是具有相同的价格和期望的回报中方差最小的。 □

§3.4.4 SDF 折现因子合成的均值方差有效性

定理 3.4.2 若 X 为整体回报空间，X_1 为 X 的子空间，不妨设 $x\in X_1$，则当 x 在 X 内为均值方差有效时，其在 X_1 内必为均值方差有效，反之，若 x 在 X_1 内均值方差有效，则其不一定在 X 内均值方差有效。

证明：不妨设 X 内折现因子为 m，常数模拟组合为 1_x，X_1 折现因子为 m_1，常数模拟投资组合为 1_{x_1} 。

x 为 X 空间内一均值方差有效的回报，由 (3.4.20) 式，x 可以表示为

$$x=\alpha m+\beta 1_x \tag{3.4.21}$$

若 x 落在回报空间 X_1 内，则不妨设

$$x=\alpha m_1+\beta 1_{x_1}+\epsilon \tag{3.4.22}$$

其中 $\epsilon\in X_1$ 。由

$$m_1=\hat{E}(m|X_1),\quad 1_{x_1}=\hat{E}(1|X_1)=\hat{E}(1_x|X_1)$$

我们可得 $\forall x_1\in X_1$，有

$$E(x_1\epsilon)=E(\alpha(m-m_1)x_1+\beta(1_x-1_{x_1})x_1)=0$$

所以 $\epsilon=0$ 。

故 x 必然可表示为

$$x=\alpha m_1+\beta 1_{x_1}$$

即 x 在 X_1 内也为均值方差有效的回报。

定理后半部分的证明采用例证的方法，假设 $X_1 = [m, 1_x]^{\perp}$，则 X_1 内部均值方差有效的回报前沿显然在 X 内部不是均值方差有效的。 □

定理 3.4.2 的示意图见图 3.2：

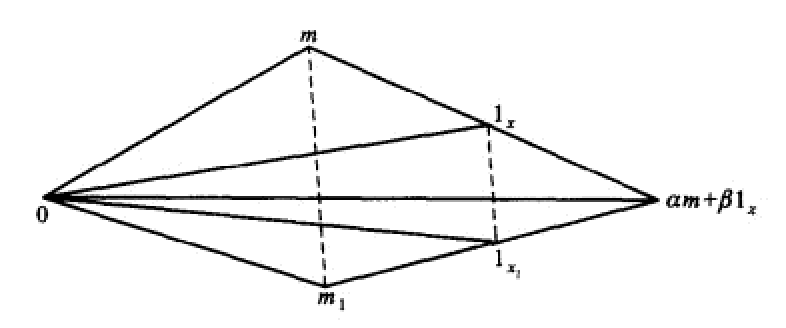


图 3.2　均值方差有效性示意图

m 为回报空间 X 内的 SDF 折现因子，m_1 为 m 在 X_1 内的投影，1_x 为常数 1 在 X 内的模拟组合，1_{x_1} 为 1_x 在 X_1 内的投影，也即是常数 1 在 X_1 内的模拟组合。

图中显示，$\alpha m + \beta 1_x$ 为均值方差有效的回报与回报子空间 X_1 的交集。

由示意图，均值方差有效的回报在线性空间内实际上是由两个随机变量组成的一个面，我们还可以得到如下的定理。

定理 3.4.3　假设 X 为回报空间，X_1 和 X_2 为 X 的子空间，若 X_1 和 X_2 内分别存在在 X 内均值方差有效的回报 x_1,x_2,$x_1 \neq x_2$ 且两者不完全线性相关，则 X 内所有均值方差有效的回报均可由 x_1 和 x_2 线性表示。

证明：不妨设

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_1 m + \beta_1 1_x \\
x_2 &= \alpha_2 m + \beta_2 1_x
\end{aligned}
$$

由假设条件，必然可以解出 $m, 1_x$ 均为 x_1,x_2 的线性组合，则任意 $x = \alpha m + \beta 1_x$ 均可表示成 x_1,x_2 的线性组合，即 x_1,x_2 张成的平面上所有的回报都是均值方差有效的回报。 □

值得提出的是，尽管均值方差有效的回报组合了一个平面，但并不能保证 $\alpha m + \beta 1_x$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$ 与任意子空间都有交集 (原点除外)，在三维空间内，任意两个过原点的平面至少有一条直线相交，在更高维空间内，这个结论不再成立。那么如何判断一个子空间内是否存在均值方差有效的回报呢？在此我们提出一个子空间 X_1 内存在在全空间内均值方差有效的回报的充分条件。

定理 3.4.4 设 X_1 为 X 的子空间，若 X_1 的维度仅比 X 低 1, 则 X_1 内必然存在在 X 内均值方差有效的回报。

证明：用反证法，假设在 X_1 内不存在在 X 内均值方差有效的回报，则

$$X_1 \cap ([m] \oplus [1_x]) = 0$$

则回报空间 X 的维度有

$$\dim(X) = \dim(X_1) + 2 > \dim(X)$$

产生矛盾，故 X_1 中必然存在均值方差有效的回报。 □

由定理 3.4.4, 立刻得到如下推论。

推论 设 $p_1(x)$,$p_2(x)$ 为 X 上两个不同的线性函数，定义

$$V = \{x | p_1(x) - p_2(x) = 0\}$$

则 V 中必然存在均值方差有效的回报。

由定价误差的维数定理的证明和定理 3.4.4, 推论的证明是不言自明的。

关于均值方差有效的回报的另外一种特殊情形：若 X_1 中存在无风险的回报 R_f,R_f 必然是均值方差有效的，在图 3.2 中对应着 $1_x = 1_{x_1} = 1$ 的情况，因此若 X_1 中还存在另外一个完全不相关的均值方差有效的回报 x_1, 则 X 中所有均值方差有效的回报均处于 X_1 中。此时 X 空间中组合投资的选择等价于 X_1 中组合投资的选择。

关于回报空间 X 均值方差有效前沿和其子空间内均值方差有效前沿的关系，可用图 3.3 表示。

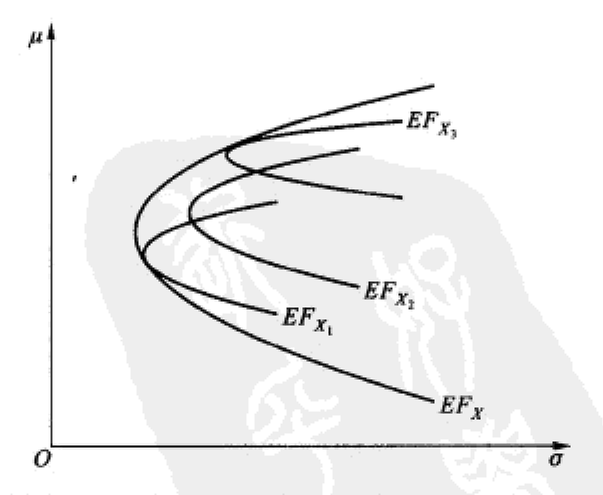


图 3.3 回报空间 X 及其子空间内均值方差有效前沿

EF_X 为 X 内均值方差有效前沿，X_1 和 X_3 均有唯一的 (σ,μ) 与之相切，X 内均值方差有效前沿可由这两个切点张成．X_2 中均值方差有效前沿上所有点在全空间内都不是均值方差有效的．

§3.5 资本资产定价模型 (CAPM) 和消费贝塔模型

CAPM(Sharpe, 1964; Linter, 1965) 产生早于 APT, 其与无套利的关系却没有 APT 那么明显．通过假设收益率服从正态分布 (在连续时间扩散模型中，则是局部正态) 或者通过假设经济人都具有双曲效用函数，可以建立一个精美的资产定价理论．该理论中，有两个额外的概念．首先，既然经济人只关心资产收益的均值和方差，他将选择均值方差有效的组合，即那些位于均值方差空间前沿的组合．这等价于两基金分离定理，它说明所有有效的投资组合都位于一条直线上．均值方差有效的结果是市场组合 (组合中所有资产的持有量与它们的价值成比例) 本身是均值方差有效的．事实上，市场组合的均值方差有效性等价于 CAPM．

在任何使用双曲效用估值的模型中，定价核自然就以边际效用 (效用的导数) 表示，而且它关于市场组合是线性的．不难推出 CAPM 的定价核具有形式

$$\varphi = \frac{1}{1+r}(1-\lambda(m-E_m))$$

因此，任何资产都必须满足

$$\begin{aligned}1 =& E(\varphi(1+x_i))\\ =& E\left(\frac{1}{1+r}(1-\lambda(m-E_m))(1+x_i)\right)\\ =& \frac{1+E_i}{1+r}-\frac{\lambda}{1+r}\mathrm{Cov}(x_i,m)\end{aligned}$$

令 $i=m$, 能解得 λ 满足

$$E_m - r = \lambda\sigma_m^2$$

从而，我们可以将 SML 方程重写为

$$\begin{aligned} E_i - r =& \lambda \mathrm{Cov}(x_i, m) \\ =& (E_m - r)\beta_i \end{aligned}$$

其中 β_i 是资产组合的收益对市场收益 m 的回归系数.

SML 表明, 持有某组合的投资者通过资产对组合的边际贡献对该资产估值. 如果资产相对于组合的 β 为正, 那么将其加入到组合中将增加组合收益的波动性. 为了就波动性的增加对风险厌恶投资者做出补偿, 均衡时, 该资产必须有正的超额预期收益. 事实上, SML 表明超额收益与 β 成比例.

上述论断在单期情况下成立, 此时期末财富都用于消费, 也就是期末消费等于期末财富. 在多期情况下, 可能存在的中间时期消费使得消费流不同于财富存量. 如果仅考虑消费且用消费流的效用之和表示偏好, SML 也成立. 此时, β_i 为资产 i 对个体消费或总消费 (如果有总消费) 的回归系数, E_m 被视为与消费完全相关的资产组合的预期收益. 该结果被称为消费贝塔模型 (CBM) (见 Merton, 1971; Lucas, 1978; Breeden, 1979) .

下面是 CAPM 与 SDF 的关系 .

令 p_i 表示期初时刻第 i 个风险资产价格, x_i 表示期末时刻第 i 个风险资产支付 (如果这个资产为股票, 则 x 表示期末时刻风险资产价格加期间风险资产的红利收益) .

令 $u(\cdot)$ 表示风险厌恶个体的效用函数, w_0 表示个体拥有的确定的禀赋, r_i 表示一段时期内第 i 个风险资产的投资收益率, r_f 表示无风险资产的收益率, $r_i = \dfrac{x_i - p_i}{p_i}$ 表示期间风险资产的收益率, $r_{i,e} = r_i - r_f$ 表示期间第 i 个风险资产相对于无风险资产的超额收益率, a_i 表示个体在第 i 个风险资产上的投资金额, $w_0 - \sum_{i=1}^{N} a_i$ 表示个体持有的无风险资产金额.

则在期末个体的财富为

$$\begin{aligned} w_1 =& \left(w_0 - \sum_{i=1}^{N} a_i\right)(1 + r_f) + \sum_{i=1}^{N} a_i(1 + r_i) \\ =& w_0(1 + r_f) + \sum_{i=1}^{N} a_i(r_i - r_f) \\ =& w + \sum_{i=1}^{N} a_i r_{i,e} \end{aligned}$$

其中 $w = w_0(1+r_f)$ 表示如果个体在期初将全部禀赋投资在无风险资产上，其在期末可以获得的确定的财富水平.

使个体期望效用达到最大化的风险资产投资金额满足

$$a^* \in \arg\max_a \left\{ E\left(u\left(w + \sum_{i=1}^{N} a_i r_{i,e} \right) \right) \right\} \tag{3.5.1}$$

这样由 (3.5.1) 式的优化的一阶条件得到

$$E(u'(w_1) r_{i,e}) = 0 \tag{3.5.2}$$

通过简单计算，我们得到 SDF 的表达式：

$$p_i = E\left(\frac{u'(w_1)}{r_f E(u'(w_1))} x_i \right) = E(m x_i) \tag{3.5.3}$$

其中 SDF 由下式给出

$$m = \frac{u'(w_1)}{r_f E(u'(w_1))} \tag{3.5.4}$$

我们可以将一阶条件重新表达为

$$E(u'(w_1))E(r_e) = -\text{Cov}(r,\ u'(w_1)) \tag{3.5.5}$$

即

$$E(r) - r_f = -\text{Cov}\left(r,\ \frac{u'(w_1)}{E(u'(w_1))} \right) \tag{3.5.6}$$

§3.6　两阶段动态资产定价模型 —— 对市场动量因素 (Momentum Factor) 的经济学解释

资本资产定价模型现在被 Ross 称为新古典 (Neoclassical) 资产定价模型。所谓市场动量因素是指一些好上市公司的股票已经涨了很久之后，按照理性投资者的预期已经是价值高估了但股价继续上涨，反过来一些坏股票的股价大幅下跌后按理性投资者的预期已经是价值低估了，但股价继续下跌，形成一种市场动量，按新古典资产定价模型是无法解释这类“异象”的。

新古典金融理论的理性预期或有效市场模型有两个关于经济主体的最基本的假定：

1. 拥有完全的、理性的处理信息的能力；

2. 拥有完全的有关经济体基础结构的知识。

对金融市场各种“迷团”和“异象”的解释如果是放松第一条而保留第二条假定，就是“行为范式”；如果是放松第二条保留第一条假定，则是“理性范式”。这导致现在行为金融学的热门，在这里我们基于证券市场投资者特征分类，建立一个融合了新古典理性预期和行为金融非理性预期的两阶段动态资产定价模型。除了假定投资者在认知过程中存在过度自信以外，与 Danile 等人 (1998) 不同，我们并没有假定投资者同时还具有有偏归因或其他的心理因素，而是考虑了新兴市场中噪声交易者的学习过程对资产定价的影响。我们的模型不仅能很好地解释过度自信溢价，还对动量因素给出一个经济学解释，为动量投资策略的应用提供了一个很好的预测参考变量。

§3.6.1 经济环境设定

我们考虑一个只有一种股票和一种无风险债券的市场。所有的投资者在经济初期做决策，在经济末期将财物全部消费掉。股票的供给用 ξ 表示，且 $\xi > 0$。在不失一般性的前提下，我们把无风险债券利率设定为零，这样我们就不必考虑利率对资产定价的影响。我们也可以把这里的股票视为一个市场组合，该股票或市场组合在末期的支付用 θ 表示，且服从均值为 μ 方差为 σ^2 的正态分布。

按照投资者所掌握的信息集合的差异将市场中的投资者分成以下三类：

1. 第一类投资者：根据公开信息进行理性投资的，信息主要来自于卖方研究员的报告 (Public Information Set)。这类投资者往往都是具有多年投资经验的非机构投资者，其所掌握的资金规模不大，没有动力去进行诸如上市公司调研此类的信息挖掘工作，但由于其具有多年证券市场投资经验，他懂得如何获取券商提供的各种研究报告，以及常用资讯系统中包含的公开信息，并对其进行理性的分析。在我国这类投资者通常就是我们常说的老股民。

2. 第二类投资者：在掌握公开信息的同时，根据内部 (或私有) 信息进行理性投资的，其私有信息主要来自于买方研究员的报告 (Private Information Set)。这类投资者往往都是经验丰富并掌握大量资金规模的专业机构投资者。机构投资者的专业性使其有能力对上市公司进行深入和复杂的分析，而又因其管理的资产规模庞大，他们有动力去主动挖掘私有信息来盈利。一般来说，机构投资者拥有自己的信息搜集系统，能够承担搜集信息所花费的成本，拥有的信息较多。在我国这类投资者通常包括基金公司、证券公司的资产管理部等。

3. 第三类投资者：根据非信息集的消息进行非理性投资的噪声交易者，其投资决策并不基于信息 (Non-information Set)，这部分投资者投资决策非理性，具有无知者无畏的特征．在我国这类投资者通常就是我们常说的新股民，他们缺乏证券投资经验，往往都是在亲戚朋友的示范效应鼓动下参与股市，投资决策依据的都是一些小道消息，并不具有理性分析公开信息的能力 [①] ．

为方便起见，我们分别称上述三类投资者为理性投资者，过度自信投资者和噪声交易者。我们假定理性投资者知道 σ^2 的精确值为 σ_R^2 ．过度自信投资者认为他们自己能获得关于 θ 的更多信息，这样他们认为自己投资股票所面临的风险也比别人低．也就是说，他们错误地相信股票支付 θ 的方差较低，即 $\sigma_C^2 < \sigma_R^2$，这里 σ_C^2 是过度自信投资者所相信的风险，进一步假定 $\sigma_C^2 = \beta\sigma_R^2$，其中 $0 < \beta < 1$．噪声交易者则完全不根据证券或相关的经济信息进行投资决策，其对风险的研读完全取决于对其他两类投资者的观察信息，该类投资者由于缺乏必要的专业知识，其无法或不想对证券价值进行独立的评估，进行投资决策时往往采用一种跟风式的策略．但值得注意的是，我们不能因此说噪声交易者为非理性交易者，相反，他们会采用相应的信息处理方式，从别人对证券价值和风险的评估行为中间接地评估股票的价值和风险．假定噪声交易者以 P_R 的概率认为股票的风险为 σ_R^2，以 P_C 的概率认为股票的风险为 σ_C^2，即噪声交易者所相信的股票风险为 $\sigma_N^2 = \begin{cases} \sigma_C^2 & : & P_C \\ \sigma_R^2 & : & P_R \end{cases}$，其中 $P_R + P_C = 1$．为方便起见，我们假定三类投资者对股票支付的期望是一样的，即 $E_R(\theta) = E_C(\theta) = E_N(\theta)$．

下面，我们分析一个三类投资者参与的两阶段投资过程，在第一阶段理性投资者和过度自信投资者分别根据自己所获得的信息，对风险资产的收益和风险特征做出判断，并据此进行投资决策，确定风险资产上的配置比例．噪声交易者虽然没有任何信息，但他能观察到其他两类投资者的行为，在第一阶段噪声交易者尚无法判断理性和过度自信投资者中，那一类投资者对风险的判断更准确一些，所以其在判断股票的风险时均衡考虑前两类投资者的信念，即 $P_R = P_C = 1/2$．

在第二阶段，噪声交易者可以根据第一阶段的理性和过度自信两类投资者的表现和市场均衡价格来更新其对股票风险的判断，也就是说如果理性投资者表现比较好，噪声交易者在评估股票的风险时就更倾向于理性投资者估计的风险值，即适当增加 P_R，反之则调高 P_C．具体的信息更新过程见 §3.6.2.3．

---

① 由于我国证券市场发展历史短，目前证券投资者占城市人口的比例只有 20%，占全体人口的比例不到 4%，未来会不断有新的证券投资者参与市场的，所以第三类投资者在我国这种新兴市场中更需予以关注．

最后，我们假定所有的投资者都具有相同的偏好和风险厌恶系数，即 $A_R = A_C = A_N = A$ 。在每个阶段中，初期和末期财富分别为 W_0 和 W_1，投资者 j 选择构造他的证券组合以最大化 $E_j(-\exp(A\tilde{c}_j))$，这里 $\tilde{c}_j$ 为末期的消费，等于他的财富组合在末期的支付 W_{1j} 。以 P 表示初期股票的价格，以 X_j 表示投资者 i 对风险证券的需求量。

§3.6.2 两阶段动态资产定价模型

在这里我们想构建如下的投资和定价模型，第一阶段股价的上涨是由于“理性的”过度自信投资者 推动的，第二阶段由于股价上涨的如此之高使得那些一开始怀疑上涨的噪声交易者 (Noise Traders) 开始相信股价的上涨一定有自己所不知道的基本面信息来支持上涨，因此当前高价位的“定价模型”是合理的，从而积极加入交易将股价推至更高，形成所谓的市场动量。

§3.6.2.1 基本模型

我们首先从市场中只有一类投资者出发，根据经典的资产定价理论，在市场只有理性投资者时，投资者 i 将面临下述组合选择问题：

$$\max_{X_j}\left\{E(W_{1j}) - \frac{A}{2}\mathrm{Var}(W_{1j})\right\} \tag{3.6.1}$$

满足

$$W_{1j} = W_{0j}(1+r_f) + X_j(\theta - P(1+r_f))$$

其中 W_{1j} 的一阶矩、二阶矩分别如下：

$$E(W_{1j}) = W_{0j}(1+r_f) + X_j(E(\theta) - P(1+r_f)) \tag{3.6.2}$$

$$\mathrm{Var}(W_{1j}) = X_j^2\sigma_R^2 \tag{3.6.3}$$

将 (3.6.2) 和 (3.6.3) 式分别代入 (3.6.1) 式得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= E(W_{1j}) - \frac{A}{2}\mathrm{Var}(W_{1j}) \\ &= W_{0j}(1+r_f) + X_j(E(\theta) - P(1+r_f)) - \frac{A}{2}X_j^2\sigma_R^2\end{aligned} \tag{3.6.4}$$

由 (3.6.4) 式的一阶条件可得

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X_j} = E(\theta) - P(1+r_f) - AX_j\sigma_R^2 \tag{3.6.5}$$

由于我们在前面已经假定 $r_f = 0$, 所以由上式可得投资者的最优持仓如下：

$$X_j = \frac{E(\theta) - P}{A\sigma_R^2} \tag{3.6.6}$$

由于假定市场中只有一类投资者，根据市场出清条件，所以投资者的最优持仓一定等于股票的供给 ξ, 由此我们可以得到理性的市场均衡价格.

引理 在市场中只存在理性投资者时，风险资产的市场均衡价格为

$$P = E(\theta) - \xi A\sigma_R^2 \tag{3.6.7}$$

即市场均衡价格与风险资产的期望支付成正比，与投资者要求的风险补偿成反比.

§3.6.2.2 第一阶段均衡价格分析

在我们分析的第一阶段，投资者由三类构成，其中理性投资者的比例为 ϕ_1, 过度自信投资者的比例为 ϕ_2, 噪声交易者的比例为 $1 - \phi_1 - \phi_2$. 为方便起见，我们用 P_1 表示第一阶段股票的均衡价格，由 (3.6.6) 式可以分别得到三类投资者的最优持仓如下：

$$X_R = \frac{E(\theta) - P_1}{A\sigma_R^2} \tag{3.6.8}$$

$$X_C = \frac{E(\theta) - P_1}{A\sigma_C^2} \tag{3.6.9}$$

$$X_N = \begin{cases} \dfrac{E(\theta) - P_1}{A\sigma_R^2} & : \quad P_R \\ \dfrac{E(\theta) - P_1}{A\sigma_C^2} & : \quad P_C \end{cases} \tag{3.6.10}$$

根据市场出清条件可得

$$\phi_1 X_R + \phi_2 X_C + (1 - \phi_1 - \phi_2) P_{R_1} X_R + (1 - \phi_1 - \phi_2) P_{C_1} X_C = \xi \tag{3.6.11}$$

我们知道，第一阶段在噪声交易者对股票风险进行判断时，由于其无法判断其他两类投资者中，那一类对股票风险估计得更准确一些，所以只能采取简单平均的策略，故有 $P_{R_1} = P_{C_1} = 1/2$, 因此 (3.6.11) 式可以进一步写成

$$\left(\phi_1 + \frac{1 - \phi_1 - \phi_2}{2}\right) X_R + \left(\phi_2 + \frac{1 - \phi_1 - \phi_2}{2}\right) X_C = \xi \tag{3.6.12}$$

把 (3.6.8) 和 (3.6.9) 式代入上式可得

$$\phi_1' \frac{E(\theta) - P_1}{A\sigma_R^2} + \phi_2' \frac{E(\theta) - P_1}{A\sigma_C^2} = \xi \tag{3.6.13}$$

其中

$$\phi_1' = \phi_1 + \frac{1-\phi_1-\phi_2}{2} \tag{3.6.14}$$

$$\phi_2' = \phi_2 + \frac{1-\phi_1-\phi_2}{2} \tag{3.6.15}$$

将 (3.6.13) 式两边同乘 $A\beta\sigma_R^2$, 则得到

$$\phi_1'\beta(E(\theta)-P_1)+\phi_2'(E(\theta)-P_1) = A\beta\sigma_R^2\xi \tag{3.6.16}$$

$$E(\theta)-P_1 = \frac{A\beta\sigma_R^2\xi}{\phi_1'\beta+\phi_2'} \tag{3.6.17}$$

由此我们可以得到第一阶段的市场均衡价格为

$$P_1 = E(\theta) - \frac{A\beta\sigma_R^2\xi}{\phi_1'\beta+\phi_2'} \tag{3.6.18}$$

将 (3.6.7) 和 (3.6.18) 式相减可以得到如下定理。

定理 3.6.1 当市场中存在过度自信投资者和 (或) 噪声交易者时，市场均衡价格要比理性价格水平高，即存在过度自信溢价，且两者之间存在如下关系：

$$P_1 - P = \left(1 - \frac{\beta}{\phi_1'\beta+\phi_2'}\right)A\sigma_R^2\xi > 0 \tag{3.6.19}$$

其中 P_1 为市场中同时存在三类投资者时的风险资产均衡价格， P 为市场中投资者全部为理性时的均衡价格.

§3.6.2.3 第二阶段均衡价格分析

在第二阶段噪声交易者通过 P_1 学习到新的信息，他们要调整 P_R 和 P_C . 直观上看，他们需要上调 P_C . 由 (3.6.18) 式可知 P_1 的新信息等价于 $\phi_1'\beta+\phi_2' = (1-\phi_2')\beta+\phi_2' = \beta+(1-\beta)\phi_2'$ 的信息. 前面我们已经假设噪声交易者关于 P_C 的先验信息为 1/2 . 假设信息更新为一个 AR(1) 过程，则关于 P_C 的后验信息为

$$P_{C_2} = P_{C_1} + \alpha\left(\phi_2' - \frac{1}{2}\right) = (1-\alpha)\frac{1}{2} + \alpha\phi_2' \tag{3.6.20}$$

其中 $\alpha \in (0,1)$,P_{C_1} 为第一阶段噪声交易者关于 P_C 的先验概率. 同 (3.6.11) 式，我们可以得到第二阶段的均衡条件为

$$\phi_1 X_R + \phi_2 X_C + (1-\phi_1-\phi_2)(1-P_{C_2})X_R + (1-\phi_1-\phi_2)P_{C_2}X_C = \xi \tag{3.6.21}$$

$$\phi_1'' X_R + \phi_2'' X_C = \xi \tag{3.6.22}$$

其中 $\phi_1'' = \phi_1+(1-\phi_1-\phi_2)(1-P_{C_2})$,$\phi_2'' = \phi_2+(1-\phi_1-\phi_2)P_{C_2}$, 且 $\phi_1''+\phi_2''=1$.



由此可得第二阶段的均衡价格为

$$P_2 = E(\theta) - \frac{A\beta\sigma_R^2\xi}{\phi_1''\beta + \phi_2''} \tag{3.6.23}$$

将第二阶段的均衡价格与第一阶段的均衡价格相比，即 (3.6.18) 和 (3.6.23) 式，我们发现两个阶段均衡价格的差异只在第二项的分母，下面我们对此进行分析.

(3.6.18) 式中第二项的分母为

$$\phi_1'\beta + \phi_2' = (1-\phi_2')\beta + \phi_2' = \beta + (1-\beta)\phi_2'$$

(3.6.23) 式中第二项的分母为

$$\phi_1''\beta + \phi_2'' = (1-\phi_2'')\beta + \phi_2'' = \beta + (1-\beta)\phi_2''$$

由此可见，要比较两个阶段均衡价格的大小，只要比较 ϕ_2' 和 ϕ_2'' 的大小就可以. 根据 (3.6.20) 式和 ϕ_2'' 的定义可知

$$\phi_2'' = \phi_2 + (1-\phi_1-\phi_2)\left(\frac{1}{2} + \alpha\left(\phi_2' - \frac{1}{2}\right)\right) \tag{3.6.24}$$

下面我们分情况对上式进行讨论.

1. 当 $\alpha = 0$ 时，$\phi_2'' = \phi_2'$, 则 $P_2 = P_1$；
2. 当 $\alpha = 1$ 时，$\phi_2'' = \phi_2 + (1-\phi_1-\phi_2)\phi_2'$, 又知

$$\phi_2' = \phi_2 + \frac{1-\phi_1-\phi_2}{2}$$

则有

$$\phi_2'' - \phi_2' = (1-\phi_1-\phi_2)\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{2}\right) \tag{3.6.25}$$

由 (3.6.25) 式可知，在第二阶段当 $\alpha = 1$ 时，如果 $\phi_2 \geqslant \phi_1$ 时，即第一阶段过度自信投资者的比例大于或等于理性投资者，那么 $\phi_2'' \geqslant \phi_2'$, 即 $P_2 \geqslant P_1$；如果 $\phi_2 < \phi_1$, 则 $P_2 < P_1$.

3. 当 $0 < \alpha < 1$ 时，有

$$\phi_2'' - \phi_2' = (1-\phi_1-\phi_2)\alpha\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{2}\right)$$

如果 $\phi_2 \geqslant \phi_1$ 时，即第一阶段过度自信投资者的比例大于或等于理性投资者，那么 $\phi_2'' \geqslant \phi_2'$, 即 $P_2 \geqslant P_1$；如果 $\phi_2 < \phi_1$, 则 $P_2 < P_1$.

由上述分析我们可以得到以下定理.

定理 3.6.2 当市场中的噪声交易者具有学习能力时，即 $0<\alpha\leqslant 1$，如果前一阶段由于过度自信而持续推高股价，过度自信投资者比例大于理性投资者，即 $\phi_2>\phi_1$，那么噪声交易者会在第二阶段继续推动股价上涨，产生股价动量，且两阶段均衡价格之间存在以下关系：

$$P_2-P_1=\left(\frac{1}{\beta+(1-\beta)\phi_2'}-\frac{1}{\beta+(1-\beta)\phi_2''}\right)A\beta\sigma_R^2\xi>0 \tag{3.6.26}$$

其中 P_2 为噪声交易者学习后风险资产均衡价格，P_1 为噪声交易者没有学习时的市场均衡价格.

证明：由 (3.6.19) 式可知，只要证明

$$\frac{\beta}{\phi_1'\beta+\phi_2'}<1$$

定理 3.6.1 即成立。将 (3.6.14) 和 (3.6.15) 式代入上式得

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta}{\beta\left(\phi_1+\dfrac{1-\phi_1-\phi_2}{2}\right)+\left(\phi_2+\dfrac{1-\phi_1-\phi_2}{2}\right)}\\
=&\frac{\beta}{\beta\left(\dfrac{1+\phi_1-\phi_2}{2}\right)+\left(\dfrac{1-\phi_1+\phi_2}{2}\right)}\\
=&\frac{\beta}{\dfrac{1-\phi_1(1-\beta)+\phi_2(1-\beta)+\beta}{2}}\\
=&\frac{\beta}{\dfrac{(1-\beta)(1-\phi_1+\phi_2)+2\beta}{2}}\\
=&\frac{\beta}{\beta+\dfrac{(1-\beta)(1-\phi_1+\phi_2)}{2}}
\end{aligned} \tag{3.6.27}$$

已知 $0<\beta<1, 0<\phi_1<1, 0<\phi_2<1$，可知 $\dfrac{(1-\beta)(1-\phi_1+\phi_2)}{2}>0$，由此可以证明 (3.6.27) 式小于 1 .

由 (3.6.26) 式可知，只要证明 $\phi_2'<\phi_2''$ 定理 3.6.2 即成立。由 (3.6.25) 式可知，当 $\phi_2>\phi_1$ 时，$\phi_2''-\phi_2'>0$，即 $\phi_2'<\phi_2''$. □

§3.6.3 均衡价格与影子价格的关系

从定理 3.6.2 可以看出，判断价格动量的关键就是过度自信投资者的比例



ϕ, 在这一小节里我们利用影子价格的原理，给出过度自信投资者比例的理论推导和估算方法，并进行数值模拟和实证分析．

经济学中的影子价格通常是相对于市场交易价格而言，系生产厂商根据生产成本，适当考虑市场供求关系而估算的产品价格．它通常只用于进行厂商内部不同生产部门之间的结算，或为了实现内部资源最优配置而进行计算用．影子价格的概念对研究异质投资者假定下的资产定价模型具有启发意义．因为不同类型的投资者就像经济中不同的厂商一样，每类投资者心中都有自己的一本账．

定义 3.6.1　理性投资者的影子价格　是指在市场参与主体全部为理性投资者假定下，即 $\phi = 0$ 时，市场可能出现的均衡价格水平．

由 (3.6.7) 式可得理性投资者的影子价格为

$$P^R = E(\theta) - A\sigma_R^2\xi \tag{3.6.28}$$

定义 3.6.2　过度自信投资者的影子价格　是指在市场参与主体全部为过度自信投资者假定下，即 $\phi = 1$ 时，市场可能出现的均衡价格水平．

同理，可得过度自信投资者的影子价格为

$$P^C = E(\theta) - A\sigma_C^2\xi \tag{3.6.29}$$

定义 3.6.3　市场一般均衡价格　是指在现实中，市场参与主体既包括理性投资者又包括过度自信投资者下，即 $0 < \phi < 1$ 时，市场实际出现的均衡价格水平．

令 $\sigma_C^2 = \beta\sigma_R^2$, 且 $0 < \beta < 1$, 由 (3.6.7) 式可得

$$P = E(\theta) - \frac{A\beta\xi\sigma_R^2}{\phi + \beta(1-\phi)} \tag{3.6.30}$$

假定一般均衡价格和两类投资者影子价格之间存在如下关系：

$$P = \phi P^C + (1-\phi)P^R + \Delta \tag{3.6.31}$$

其中 Δ 表示未知项．

$$\begin{aligned} &\phi P^C + (1-\phi)P^R \\ =&E(\theta) - A\phi\xi\beta\sigma_R^2 - A(1-\phi)\xi\sigma_R^2 \\ =&P - A\xi\sigma_R^2 k \end{aligned} \tag{3.6.32}$$

其中

$$k = \frac{\phi(1-\phi)(1-\beta)^2}{\phi+\beta-\beta\phi}$$

由 (3.6.32) 式可得以下定理.

定理 3.6.3 当市场中存在过度自信投资者时，市场均衡价格和两类投资者的影子价格之间存在如下关系：

$$P = \phi P^C + (1-\phi)P^R + A\xi\sigma_R^2 k \tag{3.6.33}$$

§3.6.3.1 隐含自信度

我们知道制约过度自信资产定价模型在实际中应用的关键在于如何解决度量投资者过度自信的问题. 现在从 (3.6.33) 式中可以看到， P 为可观测的资产当前市场价格， P^R 可以用卖方研究员推荐时刻之前某一段时期股票收盘价的平均价格来估算， P^C 可视为卖方研究员推荐的目标价位. 这样在其他市场参数给定的情况下我们就可以估算出隐含的过度自信投资者比例 ϕ 。这时我们可以得到如下定义.

定义 3.6.4 **隐含自信度 (Implied Confidence)** 是指根据市场均衡价格水平、理性和过度自信投资者的影子价格，按照 (3.6.33) 式计算出来的过度自信投资者占全体投资者的比例，是衡量市场过度自信程度的一个指标.

下面我们给出隐含自信度的计算方法，由 (3.6.33) 式我们可得

$$\begin{aligned} P - P^R =& \phi(P^C - P^R) + \frac{\phi(1-\phi)}{\dfrac{\phi}{1-\beta} + \dfrac{\beta}{(1-\beta)^2}}\gamma \\ (P-P^R)\beta =& \gamma(1-\beta)^2\phi^3 + ((P^C-P^R)(1-\beta) - (1-\beta)^2\gamma)\phi^2 + \\ & ((P^C-P^R)\beta + \gamma(1-\beta)^2 - (P-P^R)(1-\beta))\phi \end{aligned} \tag{3.6.34}$$

其中 $\gamma = A\xi\sigma_R^2$.

(3.6.34) 式为一个典型的三次方程，利用方程求解方法，我们可以得出 ϕ 的三个解，其中只有一个解为正根，其余两个解为虚根，该解就是我们需要的隐含自信度.

§3.6.3.2 数值模拟及实证分析

为了形象理解市场均衡价格与 ϕ 之间的关系，我们假定市场均衡价格等比增长的情况下，分别给出 β=0.6 和 β=0.4 时， ϕ 的数值模拟如图 3.4 所示.

从图中可以看到，均衡价格与隐含自信度呈正向关系. 其中 ✦ 号曲线为 $\beta=0.4$,Δ 号曲线为 $\beta=0.6$. 从两条曲线的斜率来看，在其他条件不变的情况

下，在同一隐含自信度水平上，投资者过度自信程度越大，其市场均衡价格就越高.

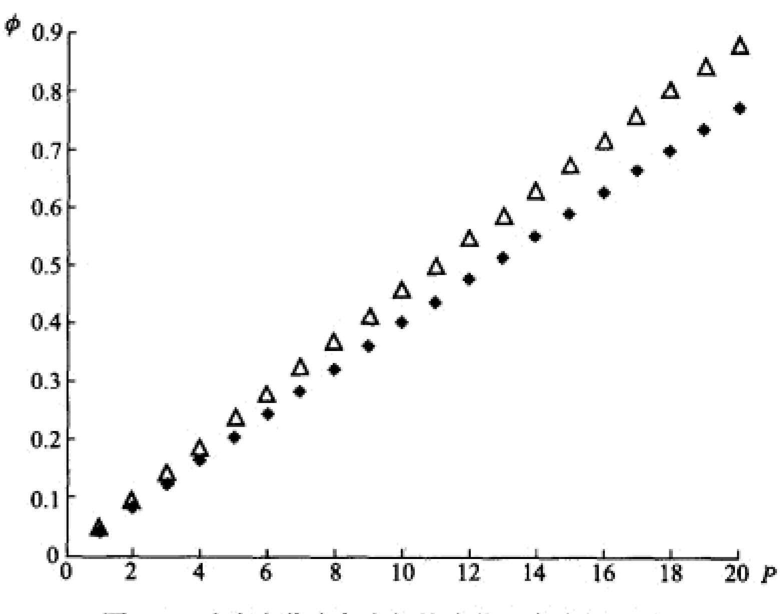


图 3.4　隐含自信度与市场均衡价格变化的关系

证券市场中分析师和研究员扮演着重要的角色，他们利用自己的知识和所掌握的资源，搜集、整理、分析和加工各种信息，他们的最终产品以研究报告的形式发表，或销售给各类投资者，以供投资参考. 按照服务对象的不同，分析师和研究员可分为两类：一类是卖方研究员，主要指券商研究所，以向公司外部投资者或投资机构出售研究报告为目的，而提供投资建议的研究人员；另一类是买方研究员，主要指像基金公司这样的机构投资者，为公司内部投资操作提供建议的研究员，不以出售研究报告为目的. 分析师对减少证券市场的信息不对称具有非常重要的意义.

例　中国石油股票

以新加坡发展银行 (DBS) 的一份关于中国石油的研究报告为例，该报告在 2006 年 1 月 20 日 (当时股价为 6.2 港币) 预测中国石油应该能涨到 8.5 港币. (在 2006 年 7 月 25 日中国石油的价格为 9.2 港币，可以看出投资者是如此的自信， 9.2−8.5=0.7 港币应为第二阶段过度自信后噪声交易者交易给出的溢价.)

我们以估算市场对该研究报告的隐含自信度为例，研究报告发布当天中国石油的市场均衡价格 P=6.2, 以研究报告预测的目标价位作为过度自信投资者的影子价格，即 P^C=8.5 ；以研究报告发布前 20 个交易日的平均收盘价作为

理性投资者的影子价格，即 P^R=6.27 . 按照 (3.6.34) 式的求解结果，在给定其他参数的情况下，我们就可以估算隐含自信度 ϕ 的时间序列 (见图 3.5) . 从图中可以直观地看到，当隐含自信度大于 0.5 以后，股价表现出明显的动量 趋势.

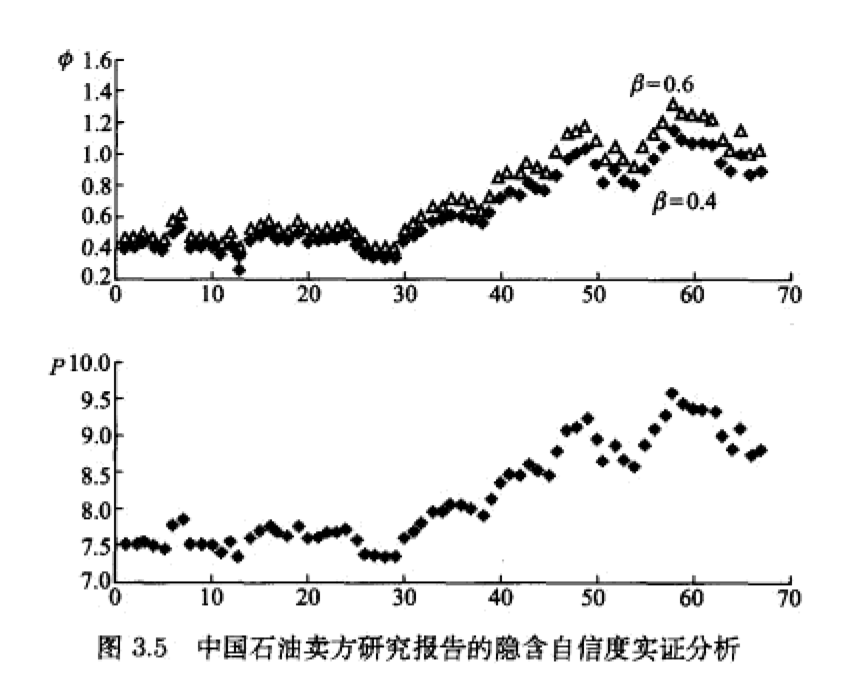


图 3.5 中国石油卖方研究报告的隐含自信度实证分析

§3.7 无风险利率与股权溢价的估计

在以上讨论的资产定价模型中，我们总是假定无风险利率与股权溢价是已知和给定的，但事实上这也是需要 “定价” 的两个最重要金融对象.

在利率市场中首先要掌握的一个概念是到期收益率 (Yield to Maturity), 第二个要掌握的是即期利率 (Spot rate), 与此相关的概念是远期利率 (Forward Rate), 下面我们将分别讨论这三个概念.

§3.7.1 即期利率与到期收益率的关系 —— 理解 1

一个收益曲线是不同到期期限 (Maturity) 的到期收益率，而利率期限结构描述的是即期利率曲线. 到期收益率计算时是假定利率期限结构是平的，例如，我们有一只债券票面值 M, 3 年后承诺收回投资 $M+C$, 并且每年支付利息，假定 3 年内，存在一平均的几何收益率 y_3 满足每年支付利息 y_3, 并且收到利息后

将该利息追加到该债券继续投资。换句话说，即按照 y_3 进行复利投资，见图 3.6 和图 3.7 ．其中

$$M(1+y_3)^3 = M + C \tag{3.7.1}$$

$$y_3 = \sqrt[3]{\frac{M+C}{M}} - 1 \tag{3.7.2}$$

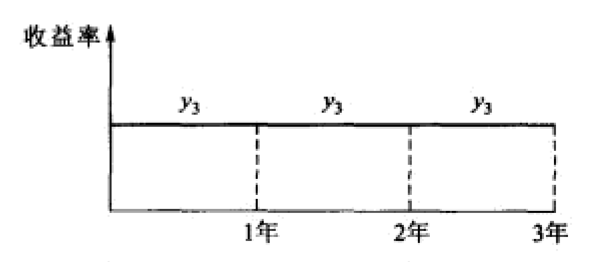


图 3.6　假定利率期限结构是平的

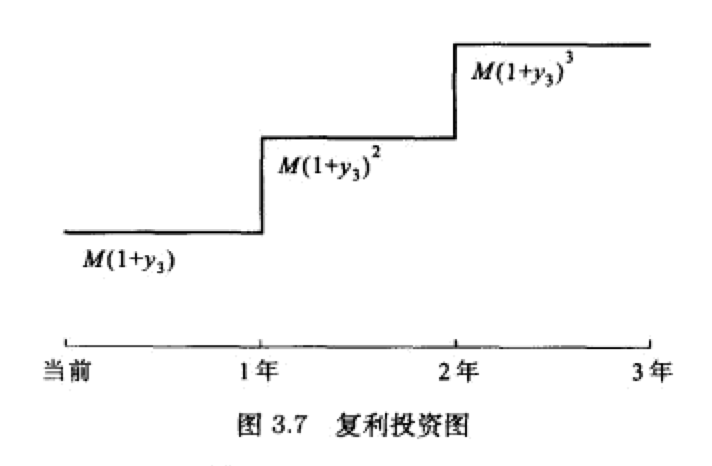


图 3.7　复利投资图

而收益曲线 (见图 3.8) 则为：即期利率是 t 年后到期，今天签定合同的贷款 (Loan) 利率，记为 $i_{0,t}$，相当于 t 年零息债券的到期收益率：

$$B_t = B_0(1+i_{0,t})^t \tag{3.7.3}$$

其中 B_0 是零息债券今天的价值，B_t 是到期交割的价值 (Par or Reimbursement Value) 。

注意，这里零息债券 指的是它只有一次现金流，即到期时的现金流 $M+C$ 。而附息债券是在每年 (甚至每半年) 发生一次付息的现金流，附息债券的到期收益率 y_T 满足

$$B_0 = \frac{C}{1+y_T} + \frac{C}{(1+y_T)^2} + \cdots + \frac{M+C}{(1+y_T)^T} \tag{3.7.4}$$

形象地表示见图 3.9:

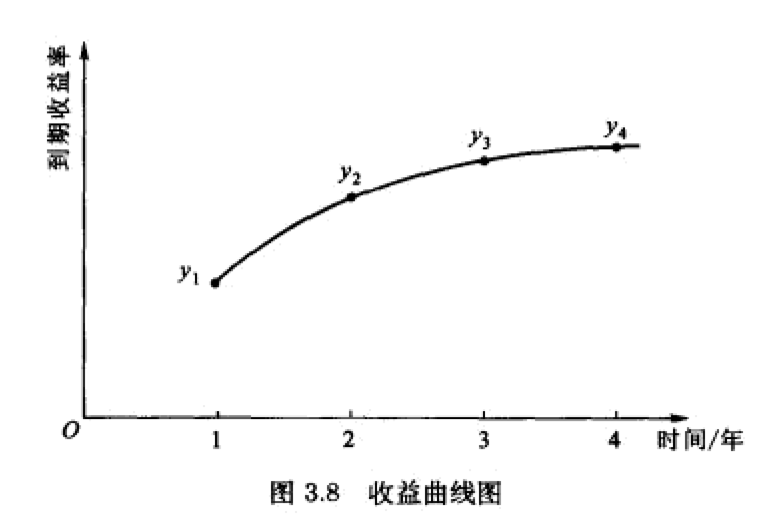


图 3.8 收益曲线图

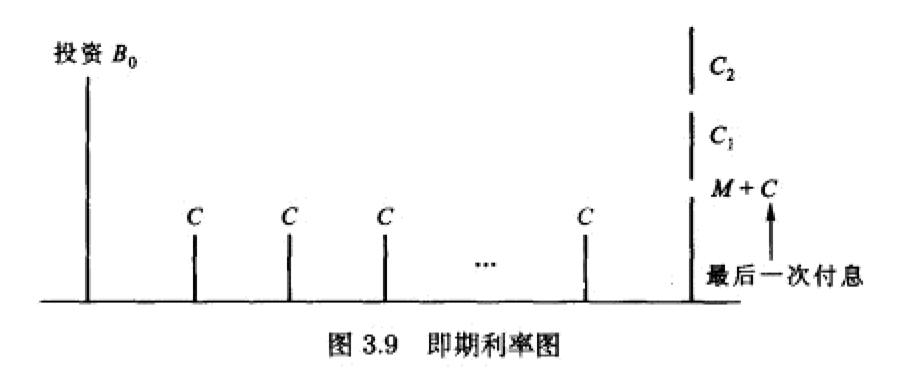


图 3.9 即期利率图

即到期收益率假定每一次付息均按利率 y_T 进行再投资. 其中

$$\begin{aligned} C_1 &= C(1+y_T)^{T-1} \qquad \text{投资}T-1\text{年} \\ C_2 &= C(1+y_T)^{T-2} \qquad \text{投资}T-2\text{年} \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ C_{T-1} &= C(1+y_T) \qquad \text{投资 1 年} \end{aligned}$$

这样到期交割时共收到现金:

$$M + C_1 + C_2 + \cdots + C_{T-1} + C$$

事实上, 投资者在收到付息后不一定进行再投资, 因此到期收益率反映的是一种最 "勤劳" 的投资策略. 而即期利率反映的是付息后不再进行再投资:

$$B_0 = \frac{C}{(1+i_{0,1})} + \frac{C}{(1+i_{0,2})^2} + \cdots + \frac{M+C}{(1+i_{0,T})^T} \tag{3.7.5}$$

由 (3.7.4) 式两边同乘 $(1+y_T)^T$ 我们得到

$$\underset{\text{在 } T \text{ 时刻的价值}}{\underset{\uparrow}{B_0(1+y_T)^T}} = \underset{\text{在 } T \text{ 时刻的现金流}}{\underset{\uparrow}{C_1+C_2+\cdots+C_{T-1}+M+C}}$$

§3.7.2　即期利益与到期收益率的关系 —— 理解 2

从定价模型的角度讲，我们有

$$P=\sum_{t=1}^{T}\frac{C_t}{(1+y_T)^t} \quad \text{和} \quad P=\sum_{t=1}^{T}\frac{C_t}{(1+S_t)^t}$$

从而

$$\sum_{t=1}^{T}\frac{C_t}{(1+y_T)^t}=\sum_{t=1}^{T}\frac{C_t}{(1+S_t)^t}$$

其中 S_t 为即期利率，y_T 为期限 T 的到期收益率。

如果我们考虑一阶 Taylor 展开，则有

$$LHS\approx\sum_{t=1}^{T}(-tC_ty_T) \quad \text{和} \quad RHS\approx\sum_{t=1}^{T}(-tC_tS_t)$$

近似地，我们有

$$y_T=\sum_{t=1}^{T}w_{t,T}S_t$$

其中权重

$$w_{t,T}=\frac{tC_t}{\sum\limits_{t=1}^{T}tC_t}$$

显然，到期时的权重 $w_{T,T}$ 一般是最高的权重，形象上，我们有图 3.10 所示的关系：

当收益曲线是向上走势时 (上升收益曲线) 一般有

$$S_1<y_T,\ S_2<y_T,\ \cdots,\ S_{T-1}<y_T$$

即期利率一般必须满足

$$S_T\geqslant y_T$$

当收益曲线是向上时，见图 3.11：

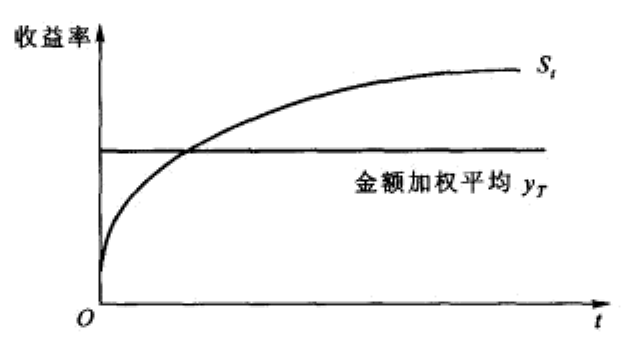


图 3.10 即期利率与到期收益率的关系

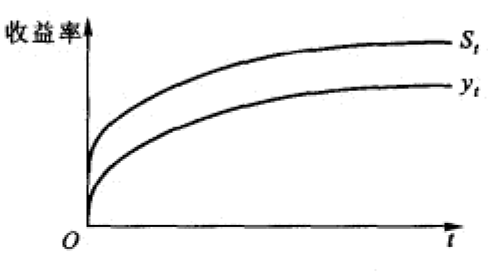


图 3.11 利率上升期间的情形

当收益曲线是向下时，即所谓利率倒挂期，见图 3.12：

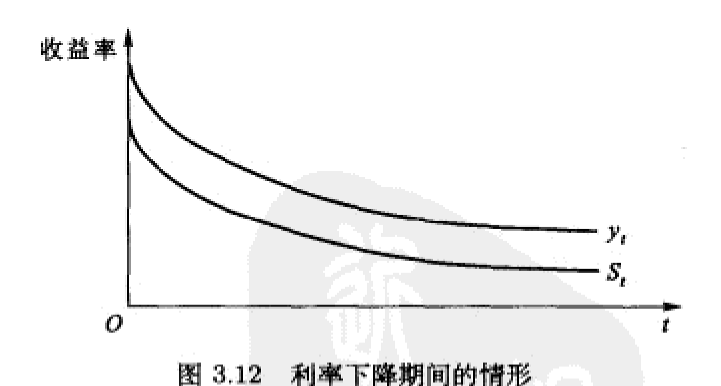


图 3.12 利率下降期间的情形

§3.7.3 利率期限结构理论

利率期限结构理论一般分为期望理论、市场分割理论 (见图 3.13)．在纯期望理论之中，远期利率仅代表未来的期望值 (Expected Future Rate)．即

$$f_t(t+T, t+T+S) = E_t(y_{t+T,t+T+S}) \tag{3.7.6}$$

其中当前时刻为 t, $y_{t+T,t+T+S}$ 为 $t+T$ 时刻才能确定的从 $t+T$ 到 $t+T+S$ 的利率，而 $f_t(t+T,t+T+S)$ 为在 t 时刻估计的从 $t+T$ 到 $t+T+S$ 的利率。见图 3.14

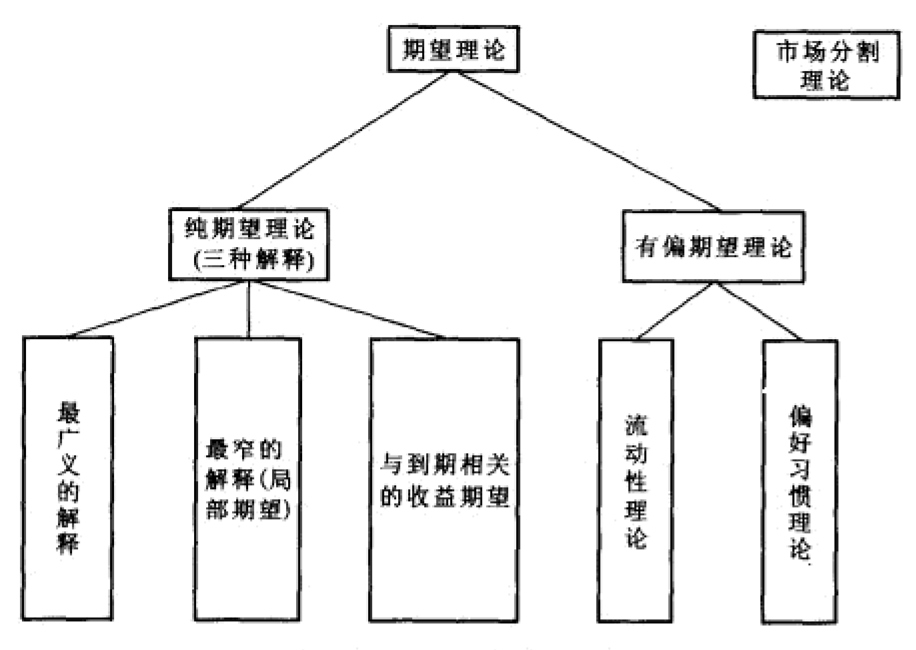


图 3.13　利率期限结构理论

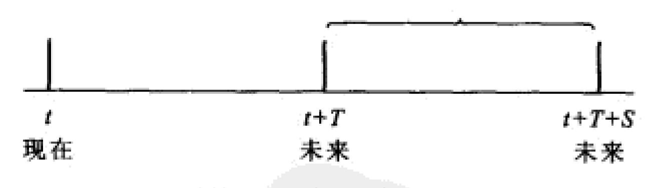


图 3.14　远期利率时点

一个自然的问题是 f_t 如何预测未来的利率。实证检验表明远期利率 f_t 并不是一个很好的预测估计，见 Fama(1976)。即远期利率并不是一个市场共同同意的利率 (Market Conseusus Rates)。一般情况，称远期利率为可对冲比率 (Hedgeable Rates)。

在纯期望理论框架下，或者称无偏期望理论框架下，一个上升的期限结构意味着市场预期短期利率要上升，反之则意味着预期下降。

如果分别投资于三个不同期限的债券 (见图 3.15), 在 $t=0$ 到 $t=5$ 的区间投资收益分别为 R_1, R_2 和 R_3, 则纯期望理论假定 $R_1=R_2=R_3$。

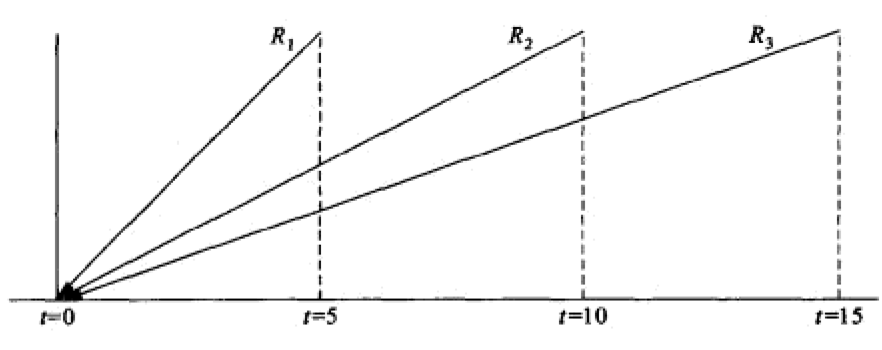


图 3.15 利率贴现图

注：R_1 表示投资于 5 年期的债券，R_2 表示投资于 10 年期的债券，R_3 表示投资于 15 年期的债券。

而这个假定显然是有问题的，如果三个债券均为零息债券 (其折现方式见图 3.16)，设 $y_{t,T}$ 为在 t 时刻确定的到期日为 $T(t \leqslant T)$ 的即期利率，则我们知道在 t 时刻债券的价值为

$$B_{t,T} = \frac{M + C_T}{(1 + y_{t,T})^{T-t}}$$

其中 $C_T = T \cdot M \cdot$ 利率水平。

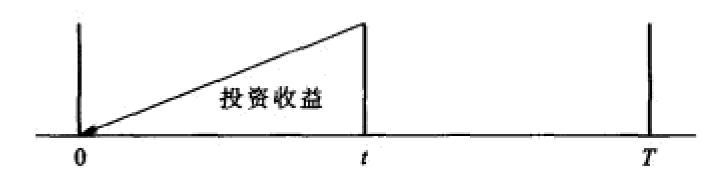


图 3.16 单周期利率贴现图

当 $t = 5$ 年时，有

$$B_{5,5} = M + C_5$$
$$B_{5,10} = \frac{M + C_{10}}{(1 + y_{5,10})^5}$$
$$B_{5,15} = \frac{M + C_{15}}{(1 + y_{5,15})^{10}}$$

而

$$R_1 = \frac{B_{5,5} - B_{0,5}}{B_{0,5}}$$
$$R_2 = \frac{B_{5,10} - B_{0,10}}{B_{0,10}}$$
$$R_3 = \frac{B_{5,15} - B_{0,15}}{B_{0,15}}$$

所以我们很难相信

$$R_1 = R_2 = R_3$$

一般地，对于 t 时刻到期日为 $T(t \leqslant T)$ 的零息债券的投资收益为

$$R_{t,T} = \frac{(1+y_{0,T})^T}{(1+y_{t,T})^{T-t}} - 1$$

因此纯期望理论有两个缺陷.

情形 1：

$$y_{t,T} > f_0(t,T)$$

则利率风险上升，债券价格下降.

$$B_{t,T} = \frac{M+C_T}{(1+y_{t,T})^{T-t}} < \frac{M+C_T}{(1+f_0(t,T))^{T-t}} = B_{t,T}^0$$

其中 $B_{t,T}^0$ 是在 $t=0$ 时刻决定的期限为 T 年的债券在 t 时刻应该具有的价格；而 $B_{t,T}$ 是 t 时刻才能确定的公平价格，但它比原来预期的价格要低. 如果利率没有发生变化，债券价格应该走的价格轨道见图 3.17：

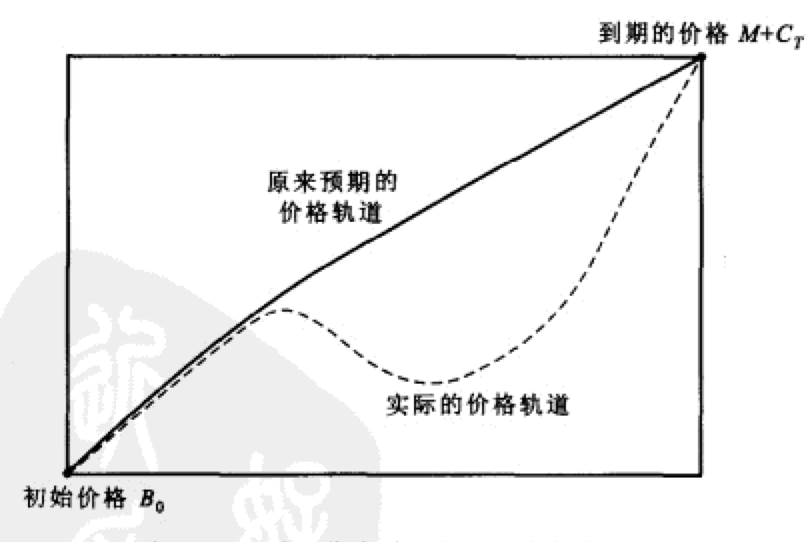


图 3.17 利率预期条件下的实际债券价格轨道

注意：债券的收益率的水平高低的确反应了投资预期收益的高低.

假设投资分两阶段进行，其中 0 到 t 为第一阶段，t 到 T 为第二阶段. 在第二阶段，预期的收益率为 $M + C_T - P_1$；而第二阶段的买入并持有的实际收益也是 $M + C_T - P_1$，完全一致！

即预期投资收益与收益率 (Yield) 高低成正比. 从分段实际投资收益的角度讲, 在第一阶段 (0 到 t) 的预期投资收益与实际收益不同, 在第二阶段 (t 到 T) 两个收益则一致. 造成这个效果 (见图 3.18) 仅是因为

$$y_{t,T} > f_0(t,T)$$

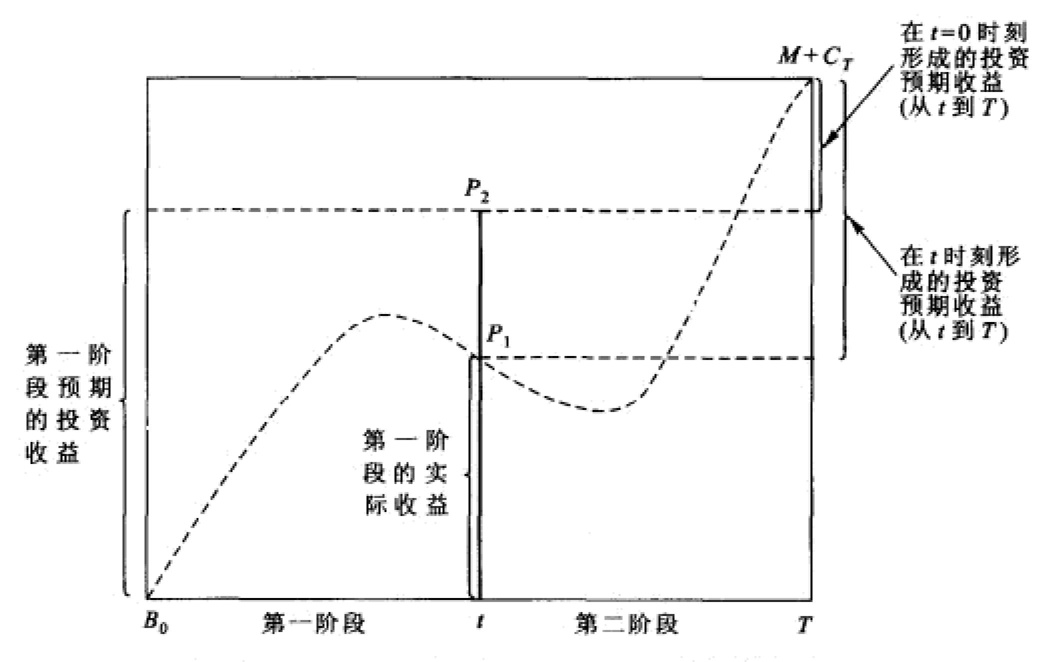


图 3.18 两周期的利率预期条件下的实际债券价格轨道

因此简单来讲, 利率风险意味着: 第一阶段收益低, 第二阶段收益高.

优化的对付利率风险投资策略意味着:

(1) 最优的策略是进行时机选择 (timing), 即在升息前退出债券市场, 等升息后再进入市场;

(2) 期限短的买入并持有的投资损失比期限长的买入并持有的投资损失要低.

情形 2 :

$$y_{t,T} < f_0(t,T)$$

则债券价格轨道见图 3.19, 即第一阶段收益增长, 而第二阶段收益减少.

这表明存在再投资风险, 即如果在 $t=0$ 时刻决定投短期期限的债券, 在 t 时刻面临一个再投资的问题, 而此时投资收益预期较低.

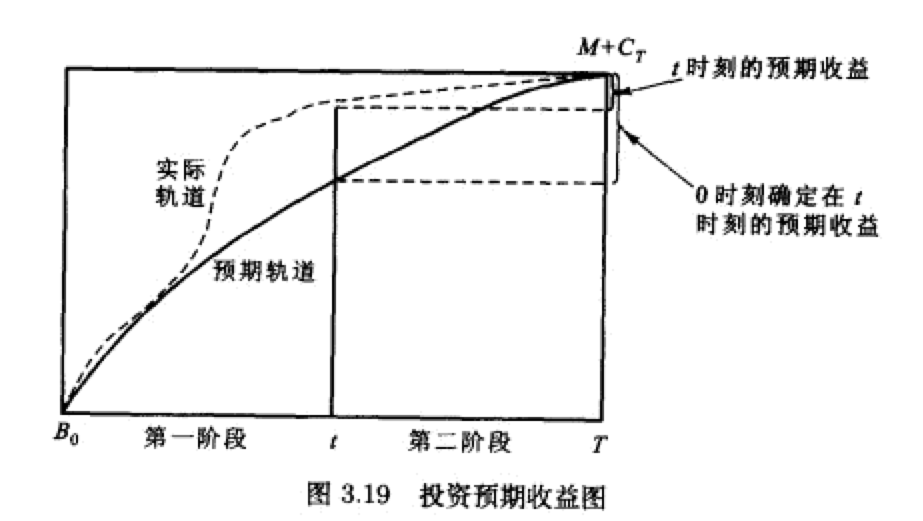


图 3.19　投资预期收益图

从而可得到对付再投资风险的优化投资策略：

(1) 投资于长期债券；

(2) 降息前做多，降息后做空。

对于纯期望理论有几种理解。一种最广义的解释是在该理论框架之下，不论其期限如何，在一段时间内的收益均是一致的。

第二种解释是纯期望理论的局部期望 (Local Expectations)，它的意思是在比较短的时间内的投资收益是一致的。例如， 5 年期债券和 20 年期债券在一个月内的投资收益是一致的。这种解释得到实证检验的支持。

有偏期望理论分为流动性理论 (Liquidity Theory) 和偏好习惯理论 (Preferred Habitat Theory)．流动性理论假定

$$f_0(t,T) = y_{t,T} + \theta_{t,T}$$

其中 θ 表示流动性溢价，且这个流动性溢价与期限成正比，见图 3.20．

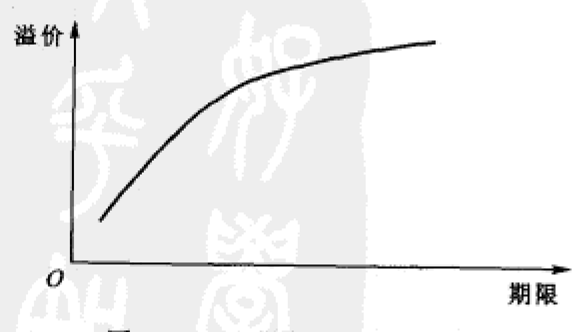


图 3.20　风险溢价的期限结构

事实上这个流动性溢价是风险溢价 (Risk Premium)．根据利率期限的流动性理论，远期利率不再是未来即期利率的市场期望的无偏估计，这样，即使当前的收益曲线是向上的，未来的利率可以是向上、不变或向下，数学上，这个流动性溢价 (见图 3.21) 为

$$\theta_{t,T} = y_{0,T} - y_{t,T}$$

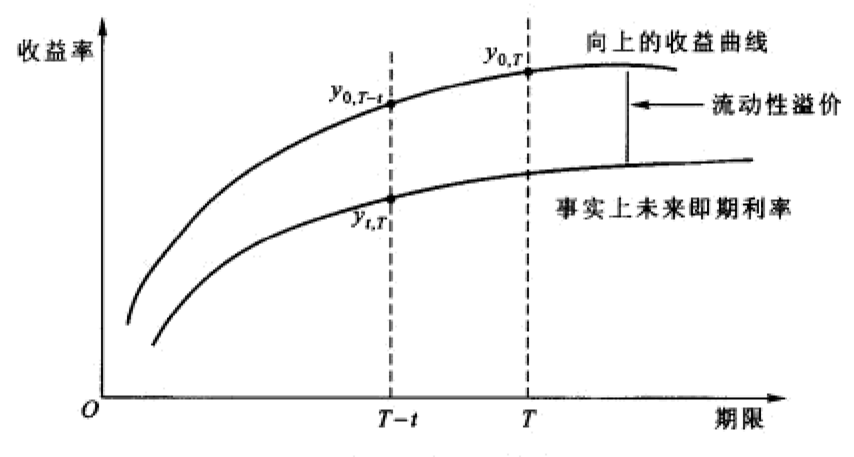


图 3.21 流动性溢价的期限结构

偏好习惯理论与流动性理论有相似之处，即均假定存在风险溢价，但偏好理论假定：风险溢价并不会随期限而单调增加．投资者对债券的期限有一定的偏好，而当投资者能获得足够多的风险补偿时，其偏好是可以改变的。

显然，根据偏好理论，收益曲线向上、向下或平行均是可能的．市场分割理论 (Market Segmentation Theory) 有一点相似，它强调在不同期限区间段有不同的收益和风险特征，承认投资者投资偏好理论由它的负债结构来决定的．

§3.7.4 股票与债券的相对定价：美联储 Fed 模型和利率的 Taylor 公式

在 20 世纪 80 年代和 90 年代，市场评论家争辩称，利率持续下跌意味着股价不断走高．这种观念在 Fed 模型中被定形，之所以称之为 Fed 模型，是因为据称它得到 Fed 前主席格林斯潘 (Alan Greenspan) 的青睐。

对于投资者而言， Fed 模型有许多值得一提的地方，例如，它把基准 10 年期国债的收益率与标准普尔 500 指数成份股的回报率进行了比较．这个模型不仅在 20 世纪 80 年代和 90 年代运作得很好，而且十分简单，几乎人人都可以运用自如．

中国也有同样的 Fed 模型．见图 3.22．在 2006 年 10 月 20 日中国证券市场的标的之一上证指数创 5 年新高 1800 点．

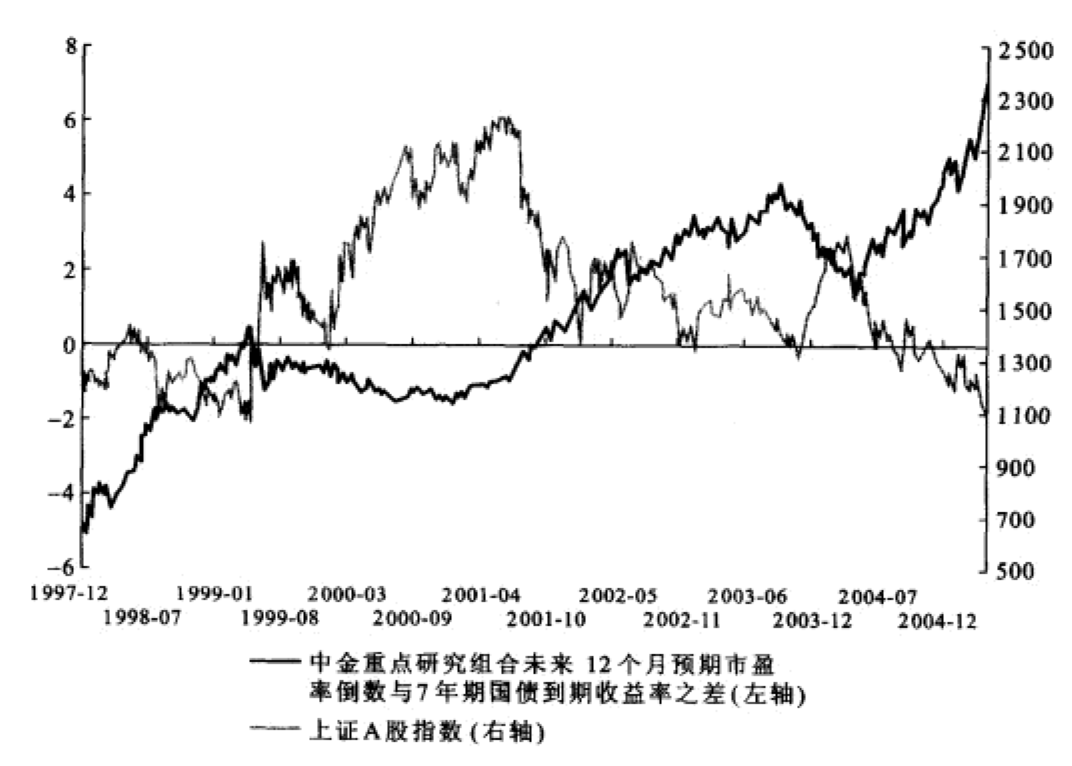


图 3.22　中国股票投资相对于债券投资的吸引力

注：中国股票投资相对于债券投资的吸引力在 2006 年 5 月显著上升．
资料来源：中金研究报告．

在使用 Fed 模型时需确定基准利率的水平，这里有确定利率的简单方法．

确定利率的简单方法

考虑以下设定联邦基金利率的 Taylor 公式：

$$\text{联邦基金利率} = 3.5\% + 1.4 \times (\text{核心通货膨胀率} - \text{失业率}) \tag{3.7.7}$$

这里，"核心通货膨胀率"是剔除食品和能源价格后的前 12 个月的以消费者价格指数衡量的通货膨胀，而"失业率"是按季节调整后的失业率．例如，如果核心通货膨胀率为 3%，失业率为 5%，那么，联邦基金利率就会设定在 5.7%．该公式中所选定的系数与 20 世纪 90 年代的数据拟合得最好．

利率公式背后的逻辑

上述利率公式背后的逻辑是简单明了的．为应对较高的通货膨胀，使经济降温，美联储提高利率．正如我们刚才讨论的那样，为避免螺旋型通货膨胀，

美联储的利率对通货膨胀的敏感性应对必须大于 1:1．另外，美联储通过降低利率以刺激总需求来应对高失业．图 3.23 描绘了货币政策对利率产生影响的基本原理。

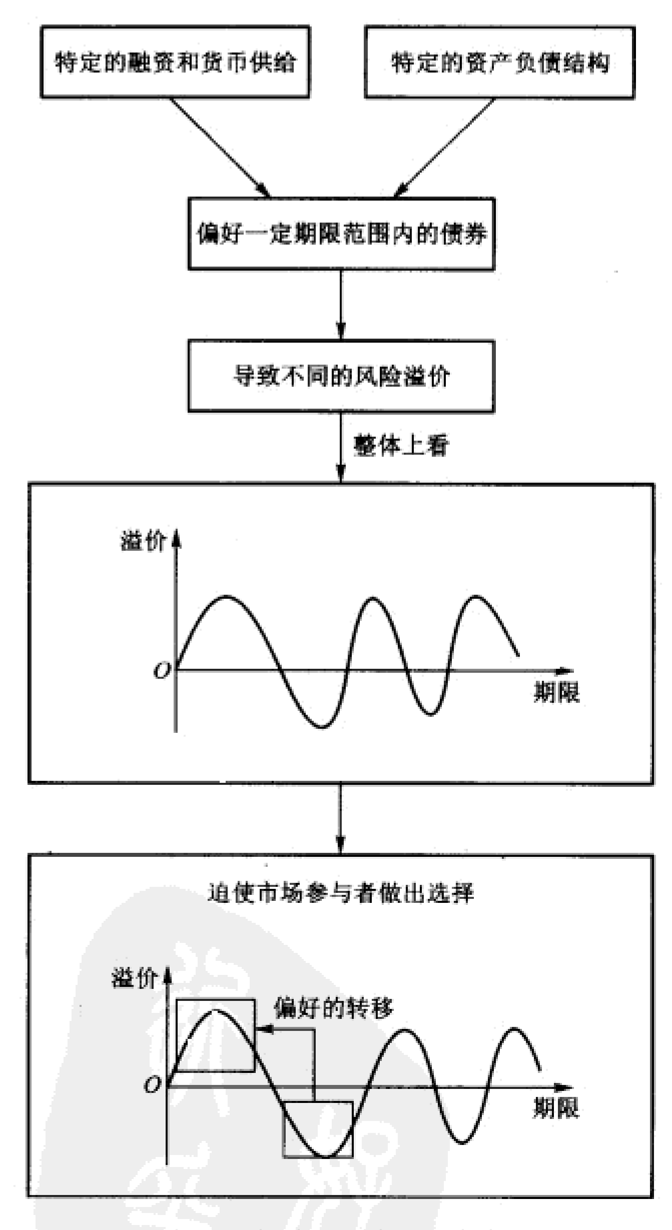


图 3.23 货币政策对利率的影响

有两个原因促使美联储可能对失业做出反应．首先，就业稳定本身可能就是目标之一．有时，立法提案要求美联储一心一意地关注价格稳定．但是，国会对美联储的实际授权总是更为宽泛。

其次，失业是未来通货膨胀的先行指标．低失业一般会产生工资上扬的压力，这进而增加了生产成本，提高了商品和劳务的价格．尽管一些观察家认为，20 世纪 90 年代的低失业和低通货膨胀组合对"菲利普斯曲线"在这两个变量之间的替代关系提出了质疑，但是，详细的统计分析表明，失业及相关变量对于预测通货膨胀来说是最有用的数据．在其他情况相同的条件下，试图控制通货膨胀的美联储将通过提高利率以对低失业做出反应．

对于 20 世纪 90 年代的货币政策，利率公式到底说明了什么

图 3.24 给出了用上述简单利率公式预测的联邦基金利率和 1958 年以来的实际联邦基金利率．对这两个序列进行比较，能够得出关于货币政策执行的几个结论．

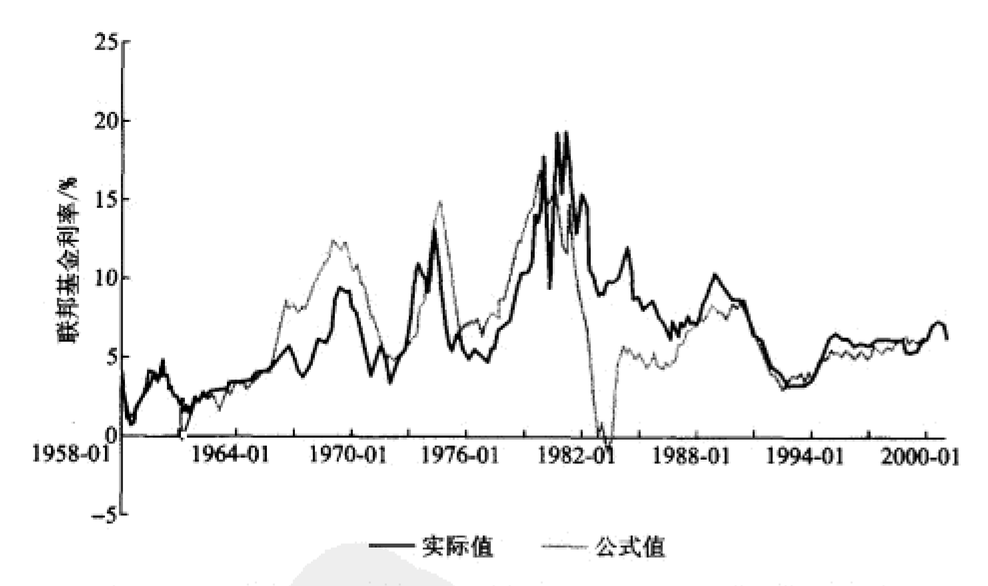


图 3.24　实际的联邦基金利率和按假设的公式预测的联邦基金利率

第一个重要的观察是，在 90 年代期间，图 3.24 中的两个时间序列结伴而行，十分接近．根据衡量拟合优度的标准指标 (统计量)，公式解释了在此期间联邦基金利率变动的 85%．这种紧密的拟合度对于理解货币政策来说具有深刻的含义．它意味着 90 年代的利率政策基本上是对同期的通货膨胀和失业水平的反应．

这一结论的推论之一是，在 90 年代，在公开的货币政策争论中居支配地位的许多其他问题必定是次要的．媒体花费大量的时间来讨论美联储主席的广泛兴趣，包括财政政策的态势、股票市场的"非理性繁荣"、"新经济"的生产率增长、墨西哥和亚洲金融危机的经济数据．显然，这些因素并不会对利

率施加重大影响. 如果它们果真对利率有重大影响, 公式就不能那么好地展示实际利率。

第二个重要的观察是, 图 3.24 中的两个序列几乎同时运动. 在 90 年代期间, 有关美联储需要先发制人地在通货膨胀和失业等经济压力出现之前做出反应的讨论有很多. 如果预测好到足以使先发制人可行, 那么先发制人就是有意义的, 因为货币政策对经济的影响通常要滞后 6~12 个月. 但是, 图 3.24 中两个时间序列强烈的正相关性, 以及利率公式在显示经济压力的迹象之前无法判断实际利率变动的趋势, 表明政策事实上根本就不是先发制人的.

对于早期的货币政策, 90 年代的情况告诉我们什么?

图 3.24 也能用于对过去的货币政策做出一些判断. 我们可以将利率公式看作是格林斯潘领导的美联储. 通过比较图中的两个序列, 我们可以看出, 对于过去的货币政策制定者所面临的经济环境, 格林斯潘领导的美联储是怎样做出反应的.

结论之一是, 90 年代格林斯潘领导的美联储可能会避免 70 年代的高通货膨胀。从 60 年代末期到 70 年代初, 在图 3.24 中, 公式利率一直高于实际利率几个百分点. 对于 70 年代末, 情形也是如此, 只是程度低一些. 这一发现表明: 与其前任相比, 90 年代美联储的政策制定者对上升的通货膨胀反应更强烈.

结论之二是, 格林斯潘领导的美联储在 80 年代早期本来应该采取更具扩张性的货币政策. 由于经济陷入自大萧条以来最严重的经济危机, 美联储本来应该更激进地降低利率. (简单地说, 利率公式表明利率应该变为负值, 当然, 这是不可能的。) 通货膨胀的下降本来应该不会那么快, 因而可以在一定程度上避免高失业。

注记 1 (美联储 Fed 模型的有用性验证 (2006 年 7 月麦考理银行研究报告)) 美国股票市场和债券市场正出现自 2002 年以来的第四次背离. 见图 3.25 . 尽管上周是自去年 11 月以来股市表现最好的一周, 长期利率仍然在下降.

较低的利率和乐观的经济前景是推动股市上涨的绝佳组合. 因而最可能的结果是, 利率市场将最终再一次得到纠正.

同时, 我们也不应低估助推美国股市的积极因素. 本次股市和债市背离的起因与以前几次略有不同. 其结果可能是作为一次强势整理推动股市上扬.

自 2002 年以来, 在美国出现过三次长期利率下降, 而股市跃升的现象.

2003 年通货紧缩和 2004 年年初日本银行的货币干预时期股市和债市的这种背离非常明显。由于第三次背离持续的时间很长，其受到的关注较少。但是从 2004 年下半年的情况看，这次背离的程度相当大。如今，第四次背离已经开始。一个月前，债券收益率和股市双双下跌。此后，标准普尔 500 指数下跌了 5%,10 年期收益率进一步下降 15 个基点。尽管标准普尔 500 指数已回复到此次下跌前的水平，债市自 3 月份以来的累积跌幅超过了 50 个基点。

市场利率的下跌被视作极为重要的信号。联储公开市场委员会 (FOMC) 一直试图紧缩国内货币供给。但是，货币政策到利率的传导链条已经断裂。由于经济表现依然强劲，不可避免会出现一段公司增长的扩张时期。股票市场表现如此好也就不足为奇了。尽管收益率的下降对股市是非常有利的，历史情况表明利率市场最终将得到纠正。

此外，本次背离的起因稍有不同。这次，10 年期收益率 (在 3 月份) 没有创新高。目前的收益率也没有明显高于前期低点。这与前面两次背离相比有明显区别，表明当前通货膨胀压力有所加大。

值得注意的是，每次背离的时间正逐渐变得越来越长。尽管不能确保这一趋势将继续，但如果这一趋势得以延续，其结果如何呢？美国股市必然会出现大幅飙升行情。事实上，美国股市的强劲走势足以带动全球股市上扬。在当前投资者对后市普遍较为悲观的条件下，发生上述行情无疑会令市场各方颇感震惊。

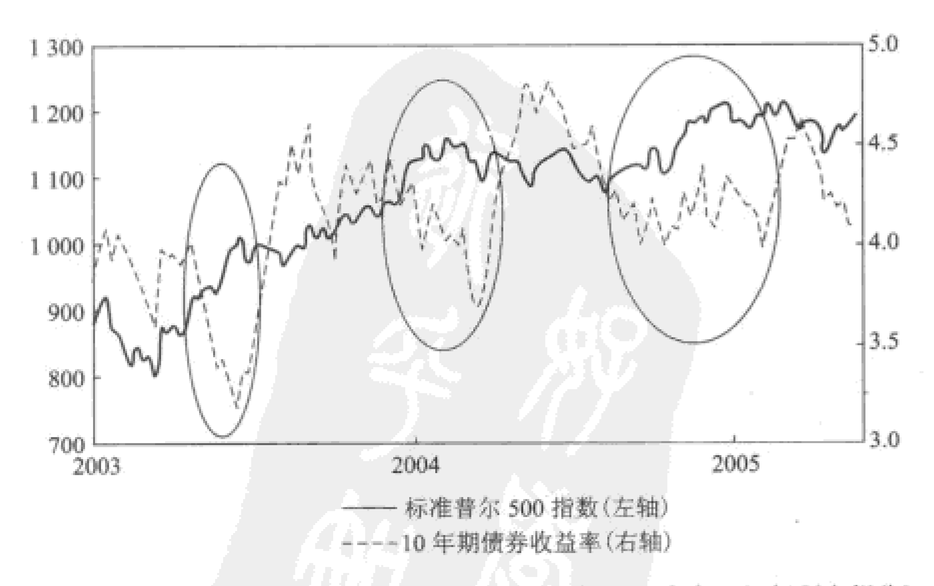


图 3.25　美联储 Fed 模型的有用性检验 (2006 年 7 月麦考理银行研究报告)

注记 2 (2006 年 10 月 19 日道琼斯指数首破历史 12000 点大关) 道琼斯工业股票平均价格指数 2006 年 10 月 19 日首次收于 12000 点上方，而在 19 年前的那一天，一切完全相反，受"黑色星期一"的影响，道琼斯指数遭到重挫，跌去了几乎四分之一的市值。谷歌 (Google) 公布了更多利好消息，而卡特彼勒 (Caterpillar) 发布的收益预警则使该公司股票大跌。

第三季度收益报告的发布高潮已经来临，它使股市行情更加难以预测。从 138 家已发布了收益报告的标准普尔 500 指数成份股公司看，它们第三季度的利润较遭受了卡特里娜飓风的去年同期平均增长了 15.6%，涨幅较人们的预期高几个百分点。

但卡特彼勒等人们预计会发布较好业绩的公司却表现得令人失望。卡特彼勒上周五下跌了 14.5%，原因是该公司新公布的业绩让投资者失望，该股的不佳表现足以拖累道琼斯指数下跌 80 点。不过该股的厄运并没有感染股市大盘，在其他成份股的顶托下，道琼斯指数上周累计还是上扬的。虽然谷歌宣布其第三季度的利润较上年同期增长了近一倍，但该公司的成功越来越显得只是行业内的个别现象，并不能使人对其同行和股市大盘抱有更高期望。

股市目前的这轮上扬行情经受住了股市淡季 9 月份的考验，并在有时表现恶劣的 10 月初站稳了脚跟，对此轮上扬行情的抱怨主要有两种。一种源于酸葡萄心理："我没有多少股票，也不想掺合这事"，或是"我是看空股市的"。

而另一种对本轮上扬行情持不屑态度的看法则是基于对当前一些相互矛盾信号的判断，这一看法认为这些信号不足以"证明"道琼斯指数有理由升至目前的历史新高。这些信号包括：参与此轮上扬行情的股票不够多，股市交投量也不够大，道琼斯交通运输分类指数未能创出历史新高，而通常充当股市先锋的半导体业领先指数等也无上佳表现，等等。

以上这些尚未对市场产生影响，即便是今后将会有所影响。面对大盘反弹这份礼物，迄今为止一直存在的深深怀疑和对其走势的挑剔使上涨走势让人们备感痛苦。(许多投资者写信抱怨恐慌 — 乐观曲线一定会被突破，因为他们坚持认为"所有人都过于乐观"就是一个例证。)

在股指反弹幅度达到两位数的这段时间里，卖空和保护性地买进看跌期权一直比通常情况下更为踊跃。小投资者开始将新资金投入到国内共同基金中，尽管数量不大。

也就是说，人气显然在变得更加乐观，并在追逐反弹走势。人们的

喝彩加油声也越来越大．公司内部人士已开始反其道而行之：内部人士卖出和买进自己公司股票的比值上周升至 24，高于前周的 14 以及去年 10 月份大盘下跌时的 4．这个指标正在接近今年春季市场处于高点时的水平，尽管仍略低一些．

由此看来，担忧的程度还没有达到两个月前那么高的水平．显然，性急的买家推动的涨势已经有所降温，至少目前如此．不过，即使投资者的情绪正在进入一个新的狂热阶段，但也所陷不深．正如投资研究机构卢梭德集团 (Leuthold Group) 的道格拉斯 · 莱姆西 (Douglas Ramsey) 上周所述：鉴于买进看跌期权的情况依然活跃，人气仍能支持股市进一步的上扬，在我看来，能够消除对市场仍处于超买状态的担忧．对人气可能产生重大影响的是情况可能迅速变化．一些新闻事件或反弹途中新的里程碑可能让投资者对他们期望中的上涨"变得清醒"，大多数涨幅显然将通过这种方式实现．但我们还没有达到这一步．

那么，谨慎的交易员或投资者应该寻找什么线索，以了解滞涨、回调甚至大幅下挫何时临近呢？

观察市场这周的走势很有意义，上周五有大量的期权和期货到期，这令乐观情绪略占上风，使得卖方暂时收手．这种情况常常会延续到期权和期货到期后的下周一早盘，但如果持续出现大量卖盘，则可能意味着一度观望的卖家开始出手了．

同以往一样，金融类股至关重要．大型银行类股一直表现坚挺，它们在保德信证券集团 (Prudential Equity Group) 上周五普遍下调该类股票的评级后并未大幅回落．上周四金融类股表现弱于大盘，当时花旗集团 (Citigroup) 和美国银行 (Bank of America) 公布了基本符合公司目标的业绩．经纪类股整体重新回到了前期的历史高点，但涨幅过大，预计将有所回落．

有一点可以肯定，就是已经上涨了 12% 的市场更容易受到某些消息的冲击，从而出现下跌．最近的伊拉克和朝鲜局势以及喧闹的中期选举等等都未能撼动大盘．在某种程度上，市场将所有消息视为利好的习惯将发生逆转．只是我们不知道这种情况何时到来．



§3.8 如何评估一个资产定价模型：定价误差与股权溢价之谜

我们知道，在 Lucas(1978) 和 Breeden(1979) 所构造的代表性消费者模型中，实际上存在这样一种假定：人均消费水平与典型投资者的消费流完全相关。 Lucas-Breeden 范式表明：资产的风险可以用其收益与人均消费的协方差来度量.

然而， Mehra 和 Prescott(1985) 对美国市场所做的实证检验结果却显示：股票的风险程度不足以解释它和无风险资产 —— 国债的收益之差，这也就是所谓的“股权溢价之谜”，即为什么现实生活中的股权风险溢价如此之高.

Weil(1989) 则以相同的数据揭示了另一现象，从理论上来说，在代表性消费者模型框架下，如果消费者具有较高的风险厌恶程度，那么出于平滑消费的动机，消费者不希望消费增长过快，除非无风险利率高得对他们有足够的吸引力，但 Weil 的研究表明，尽管国债的收益率很低，但消费者依然会持有较多的无风险资产来获得一个未来较高的消费增长率，这就是所谓的“无风险利率之谜”，或者说为什么现实世界中无风险利率会这么低．实际上，在标准的代表性消费者模型中，股权溢价之谜和无风险利率之谜是相互伴生的.

Kocherlakota(1996) 在对股权溢价之谜进行了综述与回顾的基础上，指出了解决股权溢价之谜的未来的三个可能方向：

(1) 改进效用函数的形式．标准的 CCAPM 模型中假定消费者的效用函数形式为时间与状态可分的幂效用函数，放松这一假定，考虑时间与状态不可分的效用函数形式是解决股权溢价之谜的一个方向.

(2) 市场是不完全的．由于现实生活中，并非所有的风险都可交易，同时，消费者还存在个体上的差异，因此，资产市场不可能是完全的．在不完全市场的假定下研究股权溢价之谜是另一个方向.

(3) 考虑交易成本．税收、佣金等交易成本的存在对资产的定价会发生很大的影响，在定价模型中考虑交易成本的效应会有助于股权溢价之谜的解决.

事实上，从数学上来说，可以这样来理解股权溢价之谜：给定一列风险资产回报变量 $\{x_i\}$，其相应的市场价格为 $\{p_i\}$，设 M 为一列随机贴现因子 $\{M|M=M_\theta,\ \theta\in\Theta\}$，其中 Θ 表示参数空间， $\Theta\subset\mathbf{R}^L$ ．设 Θ_1 是合理的、具有某种经济



意义的 Θ 的一个子空间. 例如，我们可以假定 Θ 是由相对风险厌恶系数 γ 所张成的空间， $\Theta=\{\gamma \mid 0<\gamma<1000\}, \Theta_1=\{\gamma \mid 0<\gamma<5\}$, 于是股权溢价之谜就变为： $\forall\theta\in\Theta_1$, 对某些 i 有

$$p_i \neq E(M_\theta x_i) \tag{3.8.1}$$

但是，对某些 $\theta\in\Theta$, 对所有的 i 有

$$p_i = E(M_\theta x_i) \tag{3.8.2}$$

那么定价误差和股权溢价之谜又有什么样的关系呢？显然，如果资产定价模型是正确定价的，或者说定价误差不存在，则股权溢价之谜也不会存在. 但反过来，存在定价误差并不意味着股权溢价之谜一定存在，因为它依赖于我们所讨论是哪一个资产回报空间和随机贴现因子空间 (对此关系的详细阐述请参见 Cheng Bing, 2007) .

Hansen 和 Jagannathan(1997) 从定价误差的角度出发，给出了衡量定价误差的 Hansen-Jagannathan 距离.

设 $\mathcal{H}=L^2(\Omega,F,P)$ 是一未定权益空间 (Contingent Claim Space), $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 为 $\mathcal{H}$ 中一列随机的资产回报变量， $\mathcal{H}^*$ 为 $\mathcal{H}$ 的对偶空间，给定市场价格向量 $\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_n)$, Hansen 和 Jagannathan 引入了一个正确定价泛函空间

$$\mathcal{M}=\{\pi\in\mathcal{H}^* \mid p_i=\pi(x_i)\}=\{M\in\mathcal{H}|p_i=E(Mx_i)\}$$

其中 M 表示随机贴现因子.

令 π 为一正确定价泛函， $\hat{\pi}$ 为一连续定价泛函， $\Im_n$ 为 $\mathcal{H}$ 中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 所张成的线性空间， Hansen 和 Jagannathan 定义最大定价误差

$$d=\sup\{|\hat{\pi}(x)-\pi(x)|: x\in\Im_n, ||x||=1\} \tag{3.8.3}$$

令 $\hat{M}$ 为一给定的随机贴现因子， M 为一正确定价的随机贴现因子，假定 $M=\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$, $\hat{M}=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$, 其中 $\boldsymbol{w}=(w_1,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{v}=(v_1,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$ 表示系数向量， $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为资产回报向量，利用最小二乘估计， Hansen 和 Jagannathan 给出了衡量定价误差的 Hansen-Jagannathan 距离

$$d=\sqrt{(\boldsymbol{p}-E(\hat{M}\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}))^{-1}(\boldsymbol{p}-E(\hat{M}\boldsymbol{x}))} \tag{3.8.4}$$

其中 $\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_n)^{\mathrm{T}}$ 表示价格向量.

在最近的研究中，程兵 (2004) 得到了一些非常深刻的结论. 程兵证明了要想得到正确定价 (Correctly Pricing) 的随机贴现因子，在随机贴现因子空间与资产回报空间之间必须存在一种保证估值 (Valuation-preserving)① 的双射映射 (Bijective Mapping)．换句话说，两个空间必须有某种类似的泛函结构或者说是复杂性. 一旦满足这一条件，则一定存在正确的定价关系，与此同时，如果定价的随机贴现因子空间的定义在经济上是合理的，那么股权溢价之谜也就不复存在. 具体而言：

(1) 给定资产回报空间 $\mathcal{X}_1$ 和随机贴现因子空间 $\mathcal{M}_1$, 如果 $M_0 \in \mathcal{M}_1$ 可以对 $\mathcal{X}_1$ 正确定价，那么在给定市场价格向量 $\{p_i\}$ 的情况下，在 $\mathcal{X}_1$ 中不存在股权溢价之谜. 若 $\mathcal{M}_1$ 与 $\mathcal{X}_1$ 是保证估值的，并且是同构的 (Isometric), 则在 $\mathcal{M}_1$ 中， M_0 唯一. 否则，在一个更大的随机贴现因子空间 $\mathcal{M}_2$ 中，会存在许多正确定价的随机贴现因子.

(2) 对资产回报空间 $\mathcal{X}_1$ 的子空间 $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_1$ ($\mathcal{X}_0 \neq \mathcal{X}_1$), 或者说更小的资产回报空间， M_0 仍然可以对其进行正确定价.

(3) 如果 $\mathcal{M}_1$ 与 $\mathcal{X}_1$ 是同构的，则对任一更大的资产回报空间 $\mathcal{X}_2$ ($\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_2$ 且 $\mathcal{X}_1 \neq \mathcal{X}_2$),$M_0$ 将不再是一正确定价的随机贴现因子. 此时，若还用 M_0 对 $\mathcal{X}_2$ 中的所有资产进行定价，则定价误差与股权溢价之谜肯定出现. 由此可知，股权溢价之谜是一种相对现象，它依赖于我们讨论的是哪一个资产回报空间和随机贴现因子空间. 对某一对资产回报空间和随机贴现因子空间来说，可能存在股权溢价之谜，但对另一对来说，则可能不存在.

(4) 设 $\mathcal{M}$ 为一随机贴现因子空间，假定存在唯一的 $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ 满足如下条件： M_1 可对资产回报空间 $\mathcal{X}_1$ 正确定价， M_2 可对资产回报空间 $\mathcal{X}_2$ 正确定价，则 $\mathcal{X}_1$ 必与 $\mathcal{X}_2$ 同构. 换句话说， $\mathcal{X}_1$ 和 $\mathcal{X}_2$ 必须具有同样的表现复杂度 (Representational Complexity)．

程兵的研究结果表明，如果资产的回报与多种风险因子 (如消费增长风险、财富增长风险、通货膨胀风险、利率风险和市场盈利风险等) 相关，那么，为了得到正确的定价关系，随机贴现因子的状态变量的选择范围必须覆盖由这些经济变量所张成的空间，如果选择范围仅限于由这些经济变量所张成的空间的子空间，则难以避免股权溢价之谜.

在众多的文献当中，在随机贴现因子的框架下，虽然有部分学者对定价模型的定价误差做过一些研究，如 Hansen 和 Jagannathan(1997) 给出的衡量定价

① 设有两个随机贴现因子 $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$, 若对 $\forall x \in \mathcal{X}$, 有 $p = E(M_1 x) = E(M_2 x)$, 则我们称其为保证估值 (Valuation-preserving) 的.

误差的 Hansen-Jagannathan 距离，但对定价误差进行完整准确的分解还尚未见到。在本章，在 Hansen 和 Jagannathan(1997) 的工作基础上，将基于程兵 (2004) 的最新研究成果，对定价误差进行精确地分解，§3.8.1 中给出了我们所得到的一些重要理论结果。

§3.8.1　定价误差的分解

§3.8.1.1　定价误差的一般分解

设 M 为正确定价的随机贴现因子，$\hat{M}$ 为另一随机贴现因子 (该随机贴现因子被人们认为可能就是 M)，x 为资产的回报 (Payoff)，p_M 是基于 M 定出的资产价格，$p_{\hat{M}}$ 是基于 $\hat{M}$ 定出的资产价格，定义 $\alpha = p_M - p_{\hat{M}}$ 为定价误差 (Pricing Error)，则对于单个资产，我们有

定理 3.8.1

$$\alpha = (\rho_{M,x} - \rho_{\hat{M},x})\sigma_M\sigma_x + \rho_{\hat{M},x}(\sigma_M - \sigma_{\hat{M}})\sigma_x + (E(M) - E(\hat{M}))E(x) \quad (3.8.5)$$

其中 ρ 表示相关系数，σ 为标准差，E 为期望算子[①]。

证明：由资产定价的欧拉方程，我们知道

$$p_M = E(Mx), \quad p_{\hat{M}} = E(\hat{M}x)$$

又

$$E(Mx) = E(M)E(x) + \mathrm{Cov}(M,x), \quad E(\hat{M}x) = E(\hat{M})E(x) + \mathrm{Cov}(\hat{M},x)$$

所以

$$\begin{aligned}\alpha =& p_M - p_{\hat{M}} = E(Mx) - E(\hat{M}x)\\ =&(\mathrm{Cov}(M,x) - \mathrm{Cov}(\hat{M},x)) + (E(M)E(x) - E(\hat{M})E(x))\\ =&(\rho_{M,x}\sigma_M\sigma_x - \rho_{\hat{M},x}\sigma_{\hat{M}}\sigma_x) + (E(M) - E(\hat{M}))E(x)\\ =&(\rho_{M,x} - \rho_{\hat{M},x})\sigma_M\sigma_x + \rho_{\hat{M},x}(\sigma_M - \sigma_{\hat{M}})\sigma_x + (E(M) - E(\hat{M}))E(x)\end{aligned}$$

□

若记 $b_\rho = (\rho_{M,x} - \rho_{\hat{M},x})\sigma_M\sigma_x$，$b_\sigma = \rho_{\hat{M},x}(\sigma_M - \sigma_{\hat{M}})\sigma_x$，$b_m = (E(M) - E(\hat{M}))E(x)$，则 (3.8.5) 式可写为

$$\alpha = b_\rho + b_\sigma + b_m \quad (3.8.6)$$

① 注意：§3.8.1.2 中的推论 3.8.3 表明，当定价误差的前两项 $(\rho_{M,x} - \rho_{\hat{M},x})\sigma_M\sigma_x$ 与 $\rho_{\hat{M},x}(\sigma_M - \sigma_{\hat{M}})\sigma_x$ 不存在时，则第三项 $(E(M) - E(\hat{M}))E(x)$ 亦不会存在。

当 $\boldsymbol{x}$为 n 维资产回报向量，即 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 可将 (3.8.6) 式写成如下向量形式

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{b}_\rho+\boldsymbol{b}_\sigma+\boldsymbol{b}_m \tag{3.8.7}$$

其中

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}=&(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^{\mathrm{T}}\\
\boldsymbol{b}_\rho=&((\rho_{M,x_1}-\rho_{\hat{M},x_1})\sigma_M\sigma_{x_1},\cdots,(\rho_{M,x_n}-\rho_{\hat{M},x_n})\sigma_M\sigma_{x_n})^{\mathrm{T}}\\
\boldsymbol{b}_\sigma=&(\rho_{\hat{M},x_1}(\sigma_M-\sigma_{\hat{M}})\sigma_{x_1},\cdots,\rho_{\hat{M},x_n}(\sigma_M-\sigma_{\hat{M}})\sigma_{x_n})^{\mathrm{T}}\\
\boldsymbol{b}_m=&((E(M)-E(\hat{M}))E(x_1),\cdots,(E(M)-E(\hat{M}))E(x_n))^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

我们还可以对相关系数进行分解，设 R 为风险资产的毛收益 (Gross Return), R^f 为事先已知的无风险资产的收益， M 为随机贴现因子，我们有

定理 3.8.2

$$\rho_{M,R}=-\frac{1}{R^f}\cdot\frac{1}{\sigma_M}\cdot Sh \tag{3.8.8}$$

其中 ρ 表示相关系数， σ 为标准差， Sh 为 Sharpe 率，

$$Sh=\frac{E(R)-R^f}{\sigma_R}$$

证明：因为 R^f 是事先已知的，则由定价公式

$$1=E(MR^f)=R^fE(M)$$

可知

$$R^f=\frac{1}{E(M)}$$

又因

$$\begin{aligned}
1=&E(MR)=E(M)E(R)+\mathrm{Cov}(M,R)\\
=&E(M)E(R)+\rho_{M,R}\sigma_M\sigma_R
\end{aligned}$$

上式两边同除以 $E(M)$, 则得

$$\frac{1}{E(M)}=E(R)+\frac{1}{E(M)}\rho_{M,R}\sigma_M\sigma_R$$

即

$$R^f=E(R)+R^f\rho_{M,R}\sigma_M\sigma_R$$

从而可以求得

$$\rho_{M,R} = -\frac{1}{R^f} \cdot \frac{1}{\sigma_M} \cdot \frac{E(R) - R^f}{\sigma_R}$$

等式右边的 $(E(R) - R^f)/\sigma_R$ 就是 Sharpe 率，记为 Sh, 则可将上式写成

$$\rho_{M,R} = -\frac{1}{R^f} \cdot \frac{1}{\sigma_M} \cdot Sh$$

□

定理 3.8.2 表明

$$\max_M\{|\rho_{M,R}|\} \iff \min_M\{|\sigma_M|\}$$

如果随机贴现因子是一元随机变量的函数，我们还可以给出股权风险溢价与随机贴现因子状态变量之间的关系。

设随机贴现因子 M 是状态变量 s 的函数，即 $M = f(s)$, 若 s 和资产的毛收益 R 服从二元正态分布，且 f 是可微的，则我们有

定理 3.8.3

$$E(R) - R^f = -R^f E(f'(s))\mathrm{Cov}(s, R) \tag{3.8.9}$$

其中 R^f 为无风险资产的收益率。

证明：因为

$$1 = E(MR) = E(M)E(R) + \mathrm{Cov}(M, R), \quad R^f = \frac{1}{E(M)}$$

故

$$E(R) - R^f = -R^f \mathrm{Cov}(M, R)$$

将 $M = f(s)$ 代入上式，并运用 Stein 引理 [①]，即得

$$E(R) - R^f = -R^f E(f'(s))\mathrm{Cov}(s, R)$$

□

定理 3.8.3 表明，在 R^f 和 $E(f'(s))$ 既定的条件下，股权溢价的大小取决于状态变量 s 和资产收益 R 之间的协方差。

对于由 n 个不同资产所组成的投资组合，我们有

① Stein 引理：若随机变量 X 和 Y 服从二元正态分布，函数 $g(X)$ 可微，则 $g(X)$ 和 Y 的协方差 $\mathrm{Cov}(g(X), Y) = E(g'(X))\mathrm{Cov}(X, Y)$ 。

定理 3.8.4

$$\alpha_p = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} \tag{3.8.10}$$

其中 α_p 为组合的定价误差，$\boldsymbol{w}$为组合中资产的权重向量，$\boldsymbol{w} = (w_1, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 且满足 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$，$\boldsymbol{\alpha}$ 为资产的定价误差向量，$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)^{\mathrm{T}}$。

证明：设 $\boldsymbol{x}$为 n 维资产回报向量，则组合的回报 $x_p = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，组合的定价误差

$$\begin{aligned}\alpha_p =& E(Mx_p) - E(\hat{M}x_p)\\ =&(\mathrm{Cov}(M, x_p) - \mathrm{Cov}(\hat{M}, x_p)) + (E(M)E(x_p) - E(\hat{M})E(x_p))\end{aligned}$$

由于

$$E(x_p) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}E(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E(x_1) \\ \vdots \\ E(x_n) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Cov}(M, x_p) = \mathrm{Cov}(M, \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \rho_{M,x_1}\sigma_M\sigma_{x_1} \\ \vdots \\ \rho_{M,x_n}\sigma_M\sigma_{x_n} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{M}, x_p) = \mathrm{Cov}(\hat{M}, \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \rho_{\hat{M},x_1}\sigma_{\hat{M}}\sigma_{x_1} \\ \vdots \\ \rho_{\hat{M},x_n}\sigma_{\hat{M}}\sigma_{x_n} \end{pmatrix}$$

故

$$\alpha_p = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}_\rho + \boldsymbol{b}_\sigma + \boldsymbol{b}_m) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$$

□

定理 3.8.1 和定理 3.8.4 表明，定价误差可以分解为三部分：随机贴现因子 M 与随机贴现因子 $\hat{M}$ 不完全相关带来的定价误差 (b_ρ)，随机贴现因子 M 与随机贴现因子 $\hat{M}$ 波动性不同带来的定价误差 (b_σ)，随机贴现因子 M 与随机贴现因子 $\hat{M}$ 的均值差异带来的定价误差 (b_m)。即

定价误差 =随机贴现因子不完全相关带来的定价误差+
随机贴现因子波动性不同带来的定价误差+
随机贴现因子的均值差异带来的定价误差

§3.8.1.2 定价误差的精确分解

设 (Ω, F, P) 是一概率空间, $\mathcal{H} = L^2(\Omega, F, P)$ 是一未定权益空间, $x_1, x_2, \cdots$, $x_n, \cdots$ 为 $\mathcal{H}$ 中一列随机的资产回报变量, $\Im_n$ 是由 $\mathcal{H}$ 中 $x_1, \cdots, x_n$ 所张成的线性空间, $\Im = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Im_n$,$\bar{\Im}$ 是 $\mathcal{H}$ 中 $\Im$ 的闭包, 显然, $\mathcal{H}$ 是一个内积为 $< x, y >= E(xy)$ 的 Hilbert 空间, 因此资产回报空间 $\bar{\Im}$ 也是一个 Hilbert 空间 (Hilbert 空间中任一闭线性子空间仍为 Hilbert 空间). 对于 $n \geqslant 1$, 令 $\boldsymbol{\Sigma}$为 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 的协方差矩阵并假定 $\boldsymbol{\Sigma}$是非奇异的. 给定资产回报变量 $x_1, \cdots, x_n$, 利用 Gram-Schmit 正交过程可以构造一组正交规范基 $e_1, \cdots, e_n$ 满足: $< e_i, e_j >= 0$, 当 $i \neq j$; $< e_i, e_i >= \|e_i\|^2 = 1$, 当 $i = 1, \cdots, n$.

设 π 为 $\Im$ 上的连续定价泛函, 易知在 $\mathcal{H}$ 中存在唯一的 M 满足

$$\forall x \in \mathcal{H},\ \pi(x) =< M,\ x >= E(Mx) \tag{3.8.11}$$

这里的 M 就是我们常说的随机贴现因子, 或称之为状态价格变量 .

定义 令 $\mathcal{X} = \Im_n$(当资产回报空间有限时) 或 $\mathcal{X} = \bar{\Im}$(当资产回报空间无限时), 给定一市场价格向量 $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_n)^{\mathrm{T}}$(对于有限资产而言) 或 $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_n, \cdots)^{\mathrm{T}}$(对于无限资产而言), 设 π 为 $\mathcal{X}$ 上的线性连续泛函, 满足

$$p_i = \pi(x_i),\quad p_i \neq 0,\ i = 1, 2, \cdots \tag{3.8.12}$$

且 $\forall x \in \mathcal{X}$, 如果 $V(x) > 0$, 则 $\pi(x) \neq 0$, 其中 $V(x)$ 是 x 的方差. 我们称 π 为给定市场价格向量 $\boldsymbol{p}$下的正确定价泛函.

令 $\mathcal{X}^*$ 为 $\mathcal{X}$ 的对偶空间, π 为正确定价泛函, M 为正确定价的随机贴现因子, $\hat{\pi}$ 为一连续定价泛函, $\hat{M}$ 为对应的随机贴现因子, 我们有

定理 3.8.5 令 $d = \| \hat{M}|_{\Im_n} - M|_{\Im_n} \|$, 其中随机贴现因子 $\hat{M} \in \mathcal{X}^*$ 满足 $\forall x \in \mathcal{H},\ \hat{\pi}(x) = E(\hat{M}x)$, $\hat{M}|_{\Im_n}$ 和 $M|_{\Im_n}$ 分别为 $\hat{M}$ 和 M 在 $\Im_n$ 上的正交投影. 假定 $M|_{\Im_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$,$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为 $\Im_n$ 的一组正交规范基, 不失一般性, 我们还假定 $\hat{M}|_{\Im_n} \in \Im_L$, 其中 $\Im_L$ 是 $\Im_n$ 的子空间, $L \leqslant n$,$\hat{M}|_{\Im_n} = \sum_{i=1}^{L} b_i e_i$,则有

$$d = \sqrt{\sum_{i=1}^{L}(a_i - b_i)^2 + \sum_{i=L+1}^{n} a_i^2} > 0 \tag{3.8.13}$$

等价地, 如果令 $M|_{\Im_n} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$,$\hat{M}|_{\Im_n} = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$, 其中, 当 $i > L$ 时, $v_i = 0$,

则有

$$d = \sqrt{(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})} \tag{3.8.14}$$

上式中， $\boldsymbol{S}$是资产回报向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的二阶矩， $\boldsymbol{S}=E(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})$. 进一步，如果我们假定 $E(\hat{M}|_{\Im_n})=E(M|_{\Im_n})$, 则可得

$$d = \sqrt{(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})} \tag{3.8.15}$$

其中 $\boldsymbol{w}=(w_1,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{v}=(v_1,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$.

证明：因为 $\forall x\in\Im_n,\ \pi(x)=E(Mx)=E(M|_{\Im_n}x)$. 不失一般性，我们可以假定 $\hat{M}$ 和 $M\in\Im_n$, 且对 $\forall x\in\Im_n,||x||=1$, 根据 Cauchy-Schwartz 不等式，有

$$\begin{aligned}|\hat{\pi}(x)-\pi(x)| &= |E((\hat{M}-M)x)| \\ &\leqslant (E((\hat{M}-M)^2))^{\frac{1}{2}}(E(x^2))^{\frac{1}{2}} \\ &= ||\hat{M}-M||\end{aligned}$$

因此 $d\leqslant||\hat{M}-M||$. 另一方面，由于 $||\hat{M}-M||>0$ (否则，有 $\hat{M}=M$ 和 $d=0$), 定义 $\tilde{M}=(M-\hat{M})/||M-\hat{M}||$, 我们有

$$\begin{aligned}\pi(\tilde{M})-\hat{\pi}(\tilde{M}) &= E(M\tilde{M})-E(\hat{M}\tilde{M})=E((M-\hat{M})\tilde{M}) \\ &= E((M-\hat{M})^2)/||M-\hat{M}||=||M-\hat{M}||\end{aligned}$$

又 $||\tilde{M}||=1$, 且 $d\geqslant\pi(\tilde{M})-\hat{\pi}(\tilde{M})=||M-\hat{M}||$, 故有 $d=||\ \hat{M}|_{\Im_n}-M|_{\Im_n}\ ||$. 利用该公式，可以很容易得到 (3.8.13) 式、 (3.8.14) 式和 (3.8.15) 式. □

由 (3.8.13) 式，我们可以清楚地看到，定价误差主要来自两部分：(1) 在一个复杂程度不够或者说错误的状态空间中试图寻找正确的定价泛函而导致的正的定价误差 $\sum_{i=L+1}^{n}a_i^2>0$；(2) 即使能够找到一个正确的状态空间 (如 $L=n$), 但由于参数估计上的错误，仍然难以避免另一部分非负的定价误差 $\sum_{i=1}^{L}(a_i-b_i)^2\geqslant0$.

推论 3.8.1 若用最小二乘法对系数向量 $\boldsymbol{v}=(v_1,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$ 进行估计，此时

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{S}^{-1}E(\hat{M}\boldsymbol{x}) \tag{3.8.16}$$

则我们得到 Hansen-Jagannathan 距离 ①

$$d=\sqrt{(\boldsymbol{p}-E(\hat{M}\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{p}-E(\hat{M}\boldsymbol{x}))} \tag{3.8.17}$$

---

① 关于 Hansen-Jagannathan 距离的详细介绍请参见 Hansen(1997) .

证明：因 M 是正确定价的随机贴现因子，故有

$$p_i = E(Mx_i) = \sum_{j=1}^{n} w_j E(x_i x_j), \quad i = 1, \cdots, n$$

从而，可以得到 $\boldsymbol{w} = (w_1, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 的准确估计

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{p} \tag{3.8.18}$$

因此

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})} \\ &= \sqrt{(\boldsymbol{p}-E(\hat{M}\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{p}-E(\hat{M}\boldsymbol{x}))} \\ &= \sqrt{(\boldsymbol{p}-E(\hat{M}\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{p}-E(\hat{M}\boldsymbol{x}))} \end{aligned}$$

□

推论 3.8.2　令 $\hat{M}$ 为一随机贴现因子，若以 R^2 ($0\% \leqslant R^2 \leqslant 100\%$) 来衡量 $\hat{M}$ 逼近正确定价的随机贴现因子的程度，则

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(\mathrm{corr}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i, \sum_{i=1}^{n} v_i x_i\right)\right)^2 \\ &= \frac{(\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{q})^2}{(\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{p})(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{q})} \end{aligned} \tag{3.8.19}$$

其中 $\boldsymbol{w}$ 由 (3.8.18) 式给定，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S}^{-1}E(\hat{M}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q} = (E(\hat{M}x_1), \cdots, E(\hat{M}x_n))^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 。

并且 $\hat{M}$ 为正确定价的随机贴现因子当且仅当 $R^2 = 100\%$, 或等价地 (3.8.18) 式成立。

证明：因

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i, \sum_{i=1}^{n} v_i x_i\right) &= \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{q} \\ \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right) &= \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{p} \\ \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i x_i\right) &= \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{q} \end{aligned}$$

故易得 (3.8.19) 式. 同时可知， $R^2 = 100\%$ 当且仅当 $\hat{M}|_{\Im_n} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{p}$, 或者说 (3.8.18) 式成立，此时 $\hat{M}$ 是资产回报空间 $\Im_n$ 中正确定价的随机贴现因子。 □

基于定理 3.8.6, 我们可以得到定价误差的精确分解公式.

推论 3.8.3 定义 $\hat{M}$ 与 M 之间的表示误差为 $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}$, 则定价误差不存在 $(\hat{M}|_{\Im_n}=M|_{\Im_n})$ 当且仅当 $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$. 一般地，我们有表示误差 $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}$ 的分解公式

$$\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}=\sigma_M\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{b}_{\text{corr}}+(\sigma_M-\sigma_{\hat{M}})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{I}_\rho+\boldsymbol{I}_\sigma \tag{3.8.20}$$

其中 $\boldsymbol{b}_{\text{corr}}=((\rho_{M,x_1}-\rho_{\hat{M},x_1})\sigma_1,\cdots,(\rho_{M,x_n}-\rho_{\hat{M},x_n})\sigma_n)^{\mathrm{T}}$,$\rho_{M,x_i}$ 为 M 与 x_i 之间的相关系数， $\rho_{\hat{M},x_i}$ 为 $\hat{M}$ 与 x_i 之间的相关系数， σ_M 为 M 的波动性， $\sigma_{\hat{M}}$ 为 $\hat{M}$ 的波动性， $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1\rho_{\hat{M},x_1},\cdots,\sigma_n\rho_{\hat{M},x_n})^{\mathrm{T}}$, 误差向量 $\boldsymbol{I}_\rho$ 表示随机贴现因子 M 与资产回报 x_i 之间的相关性与随机贴现因子 $\hat{M}$ 和资产回报 x_i 之间的相关性不同所引起的定价错误， $\boldsymbol{I}_\rho=\sigma_M\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{b}_{\text{corr}}$, 误差向量 $\boldsymbol{I}_\sigma$ 表示随机贴现因子 M 和 $\hat{M}$ 之间因波动性不同所引起的定价错误， $\boldsymbol{I}_\sigma=(\sigma_M-\sigma_{\hat{M}})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$.

证明：易见 $\hat{M}|_{\Im_n}=M|_{\Im_n}$ 当且仅当 $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}=0$. 不失一般性，我们可以假定 M, $\hat{M}\in\Im_n$, 因为 $M=\sum_{j=1}^n w_jx_j$, 所以有

$$M-E(M)=\sum_{j=1}^n w_j(x_j-E(x_j))$$

上式两边同乘以 $x_i-E(x_i)$ 并取期望后得

$$\text{Cov}(M,x_i)=E((M-E(M))(x_i-E(x_i)))=\sum_{j=1}^n w_j\text{Cov}(x_i,x_j) \tag{3.8.21}$$

从而可得

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\text{Cov}(M,\boldsymbol{x})$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}$为 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的协方差矩阵， $\text{Cov}(M,\boldsymbol{x})=(\text{Cov}(M,x_1),\cdots,\text{Cov}(M,x_n))^{\mathrm{T}}$. 类似地，我们有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\text{Cov}(\hat{M},\boldsymbol{x})$$

因而可得

$$\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\text{Cov}(M,\boldsymbol{x})-\text{Cov}(\hat{M},\boldsymbol{x}))$$

又因

$$\text{Cov}(M,x_i)-\text{Cov}(\hat{M},x_i)=(\rho_{M,x_i}-\rho_{\hat{M},x_i})\sigma_M\sigma_i+(\sigma_M-\sigma_{\hat{M}})\sigma_i\rho_{\hat{M},x_i}$$

故

$$\mathrm{Cov}(M,\boldsymbol{x})-\mathrm{Cov}(\hat{M},\boldsymbol{x})=\sigma_M\boldsymbol{b}_{\mathrm{corr}}\ +\ (\sigma_M-\sigma_{\hat{M}})\boldsymbol{\sigma}$$

□

§3.8.2　定价误差的实证检验与不同模型的比较

在上一节中，我们从理论上对定价误差进行了探讨，得到了若干重要结果，在这一节中，我们将基于这些理论结果，对基于不同效用函数形式的定价模型的定价误差进行实证检验和比较。

由 (3.8.5) 式，我们知道定价误差可以分解为三个部分，即随机贴现因子不完全相关带来的定价误差、随机贴现因子波动性不同带来的定价误差和随机贴现因子的均值差异带来的定价误差。而 (3.8.20) 式则进一步指出，如果定价误差的前两项不存在，则第三项也不会存在。换句话说，若正确定价的随机贴现因子与人们所认定的随机贴现因子完全相关且波动性一致，则不存在均值差异带来的定价误差。

在众多基于 CCAPM 模型的关于股权溢价之谜的研究之中，研究者关注最多的是定价误差的第二部分 —— 波动性差异带来的定价误差，而常常忽略定价误差的第一部分，也就是说他们做了如下假定：正确定价的随机贴现因子与他们所认定的随机贴现因子是一种完全相关关系，但实际果真如此吗？在下面的实证分析中，我们将会看到，情况不然。

在解决股权溢价之谜的各种努力当中，研究者们试图在消费增长率和效用函数的形式上作文章以逼近现实中的股权溢价，但程兵 (2004) 的研究结果告诉我们，如果随机贴现因子空间的维数小于资产回报空间的维数，则这种努力是徒劳的。在下面的关于有效国际资产组合实证分析中，我们将会清楚地看到这一点。

这就启示我们，在股权溢价之谜的研究中仅仅关注消费增长率的波动性是不够的。由于资本市场是不完备的，因此，除了因消费的不确定性而产生的风险之外，应该还存在其他的风险来源，也就是说在随机贴现因子的状态变量之中，不能只考虑消费增长率，还应考虑其他的因素。

§3.8.2.1　随机贴现因子的估计与样本数据说明

1. 对 M 的估计

设 M_0 是资产回报空间 $\Im_n=\mathrm{span}\{x_1,\cdots,x_n\}$ 中一正确定价的随机贴现因子，但 M_0 是未知的。令 M 为 M_0 在 $\Im_n$ 上的正交投影，即 $M=E(M_0|\Im_n)$.

此处我们假定 M 可取两种参数形式：

(1) 线性形式

$$M = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \tag{3.8.22}$$

其中 $\boldsymbol{c}$为参数向量，$\boldsymbol{x}$为资产回报向量. 对参数的估计采用最小二乘法，Hansen 和 Jagannathan(1997) 对此有详细的阐述。

(2) M 是资产空间 $\Im_1$ 中的非线性幂函数

$$M = \theta_0 x^{-\theta_1} \tag{3.8.23}$$

其中 θ_0 和 θ_1 为两个参数，资产回报 $x \in \Im_1$. 对参数的估计采用非线性 GMM(Gerneralized Method of Moments) 估计方法 [1] .

2. $\hat{M}$ 的选取

令 $\hat{M}$ 为一随机贴现因子，该随机贴现因子被人们认为可能是正确定价的随机贴现因子 M_0 .

实证分析中假定 $\hat{M}$ 可取如下四种形式：

(1) CRRA 效用函数下的随机贴现因子

$$\hat{M}_{t+1} = \beta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma} \tag{3.8.24}$$

其中 β 为主观贴现率 [2], γ 为相对风险厌恶系数， C 表示消费。

(2) Abel 效用函数下的随机贴现因子

$$\hat{M}_{t+1} = \beta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}\left(\frac{C_t}{C_{t-1}}\right)^{\gamma-1} \tag{3.8.25}$$

(3) Constantindes 效用函数下的随机贴现因子

$$\hat{M}_{t+1} = \beta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}\left(\frac{1 - X_{t+1}/C_{t+1}}{1 - X_t/C_t}\right)^{-\gamma} \tag{3.8.26}$$

其中 $X_t = \varphi C_{t-1}$, γ 和 φ 是两个参数.

(4) Epstein-Zin 效用函数下的随机贴现因子

$$\hat{M}_{t+1} = \beta^{\frac{\eta-\eta\gamma}{\eta-1}}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\frac{1-\gamma}{\eta-1}} R_{m,t+1}^{\frac{1-\eta\gamma}{\eta-1}} \tag{3.8.27}$$

---

① 关于非线性 GMM 估计，详见文献 Hayashi(2000),454 和 455 页。

② 一般地，经济学中通常假定 $0 < \beta < 1$, 实证分析中， β 一般取 0.95 .

其中 η 为跨期替代弹性， $R_{m,t+1}$ 为市场组合的毛收益。

3. 样本数据说明

实证分析中选取的数据如下： 1950 年 1 月 —2002 年 12 月美国标准普尔 500 指数 (S&P 500 Index) 的季度价格和收益数据， 1950 年 1 月 —2002 年 12 月美国财政部库券的季度利率数据， 1950 年 1 月 —2002 年 12 月美国人均消费季度数据和消费物价指数季度数据， 1950 年 1 月 —1998 年 12 月芝加哥证券价格研究中心 CRSP(Center for Research in Security Price) 指数的季度收益数据和 1988 年 1 月 —2002 年 12 月美国罗素 3000 指数的季度收益数据[①]．以上消费和收益数据均经消费物价指数调整为实际消费和实际收益数据。

§3.8.2.2 消费增长率与资产收益率的相关性分析

由前文我们知道，对于时间可分、状态可加的效用函数，其第 $t+1$ 期的随机贴现因子

$$M_{t+1} = \beta\frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} = \beta\frac{u'(C_t \cdot g_{t+1})}{u'(C_t)}$$

其中 $u(\cdot)$ 表示效用函数， β 为主观贴现因子， C_t 为第 t 期的消费， g_{t+1} 为第 $t+1$ 期的消费增长率， $g_{t+1} = C_{t+1}/C_t$ ．

在 C_t 已知的条件下， M_{t+1} 可以看成消费增长率 g_{t+1} 的函数，即

$$M_{t+1} = f(g_{t+1}) = \beta\frac{u'(C_t \cdot g_{t+1})}{u'(C_t)}$$

设消费增长率 g_{t+1} 和风险资产的毛收益 R_{t+1} 服从联合正态分布，则由定理 3.8.3 可得

$$E(R_{t+1}) - R^f = C_t\ E\left(\beta\frac{u''(C_t \cdot g_{t+1})}{u'(C_t)}\right)\mathrm{Cov}(g_{t+1}, R_{t+1}) \tag{3.8.28}$$

(3.8.28) 式表明，在 C_t 和 $E(\beta u''(C_t \cdot g_{t+1})/u'(C_t))$ 不变的条件下，对于 CCAPM, 股权溢价的大小取决于消费增长率和资产收益率之间的协方差。

在标准的 CCAPM 框架中，研究者们大多假定消费增长率和资产的回报之间是一种高度相关关系，甚至是 100% 的相关，在研究中，他们常常关注消费增长率和资产的波动性对定价的影响，而忽略相关性差异所带来的定价误差。在这一节中，我们将通过实证分析表明，这样的做法是不妥当的。

---

① 消费和消费物价指数数据来自于美国经济研究局网站，标准普尔 500 指数的数据来自于 Robert Shiller 教授的主页，利率数据来自于美联储网站，罗素 3000 指数的数据来自于 Yahoo 网站， CRSP 指数数据来自于 John Campbell 教授的主页。

我们利用美国市场的数据对消费增长率和资产收益率之间的相关性进行了检验，发现消费增长率和资产收益率之间的相关性非常低.

图 3.26 是消费增长率与指数收益率的相关图，其中 (a) 为消费增长率 g_t 序列与滞后 $q(q=0,\cdots,25)$ 期 CRSP 指数收益率 R_{t-q} 序列的相关图，(b) 为消费增长率 g_t 序列与滞后 $q(q=0,\cdots,25)$ 期标准普尔 500 指数收益率 R_{t-q} 序列的相关图，(c) 为消费增长率 g_t 序列与滞后 $q(q=0,\cdots,25)$ 期罗素 3000 指数收益率 R_{t-q} 序列的相关图，(d) 为 CRSP 指数收益率 R_t 序列与滞后 $q(q=0,\cdots,25)$ 期消费增长率 g_{t-q} 序列的相关图， (e) 为标准普尔 500 指数收益率 R_t 序列与滞后 $q(q=0,\cdots,25)$ 期消费增长率 g_t 序列的相关图， (f) 为罗素 3000 指数收益率 R_t 序列与滞后 $q(q=0,\cdots,25)$ 期消费增长率 g_{t-q} 序列的相关图.

图 3.27 是消费增长率和标准普尔 500 指数收益率的散点图，其中 (a) 为消费增长率 g_t 序列与标准普尔 500 指数收益率 R_t 序列的散点图， (b) 为消费增长率 g_t 序列与滞后一期的标准普尔 500 指数收益率 R_{t-1} 序列的散点图， (c) 为滞后一期的消费增长率 g_{t-1} 序列与标准普尔 500 指数收益率 R_t 序列的散点图， (d) 为消费增长率 g_t 序列与滞后一期的消费增长率 g_{t-1} 序列的散点图， (e) 为标准普尔 500 指数收益率 R_t 序列与滞后一期的标准普尔 500 指数收益率 R_{t-1} 序列的散点图.

图 3.28 是消费增长率和 CRSP 指数收益率的散点图，其中 (a) 为消费增长率 g_t 序列与 CRSP 指数收益率 R_t 序列的散点图， (b) 为消费增长率 g_t 序列与滞后一期的 CRSP 指数收益率 R_{t-1} 序列的散点图， (c) 为滞后一期的消费增长率 g_{t-1} 序列与 CRSP 指数收益率 R_t 序列的散点图， (d) 为消费增长率 g_t 序列与滞后一期的消费增长率 g_{t-1} 序列的散点图， (e) 为 CRSP 指数收益率 R_t 序列与滞后一期的 CRSP 指数收益率 R_{t-1} 序列的散点图.

图 3.29 是消费增长率和罗素 3000 指数收益率的散点图，其中 (a) 为消费增长率 g_t 序列与罗素 3000 指数收益率 R_t 序列的散点图， (b) 为消费增长率与滞后一期的罗素 3000 指数收益率 R_{t-1} 序列的散点图， (c) 为滞后一期的消费增长率 g_{t-1} 序列与罗素 3000 指数收益率 R_t 序列的散点图， (d) 为消费增长率 g_t 序列与滞后一期的消费增长率 g_{t-1} 序列的散点图， (e) 为罗素 3000 指数收益率 R_t 序列与滞后一期的罗素 3000 指数收益率 R_{t-1} 序列的散点图.

标准普尔 500 指数和芝加哥证券研究中心 CRSP 的股价指数是在学术研究中用得最多而历史时间又比较长的用以表征美国股票市场的两个指数，而罗素 3000 指数则覆盖了美国股票市场 90% 以上的市值，因此，以上述三个指数作为

美国宏观经济的表征和市场组合的代表来考察消费增长率与之关系是合适的。

图 3.26 显示，消费增长率与指数收益率之间的相关系数较低。当期消费增长率与滞后各期的 CRSP 指数收益率之间的相关系数仅在 −0.2~0.2 之间，与滞后各期的标准普尔 500 指数收益率之间的相关系数在 −0.2~0.26 之间，与滞后各期的罗素 3000 指数收益率之间的相关系数在 −0.3~0.3 之间。滞后各期的消费增长率与当期 CRSP 指数收益率之间的相关系数在 −0.2~0.2 之间，与当期标准普尔 500 指数收益率之间的相关系数也在 −0.2~0.2 之间，与罗素 3000 指数收益率之间的相关系数在 −0.35~0.3 之间。

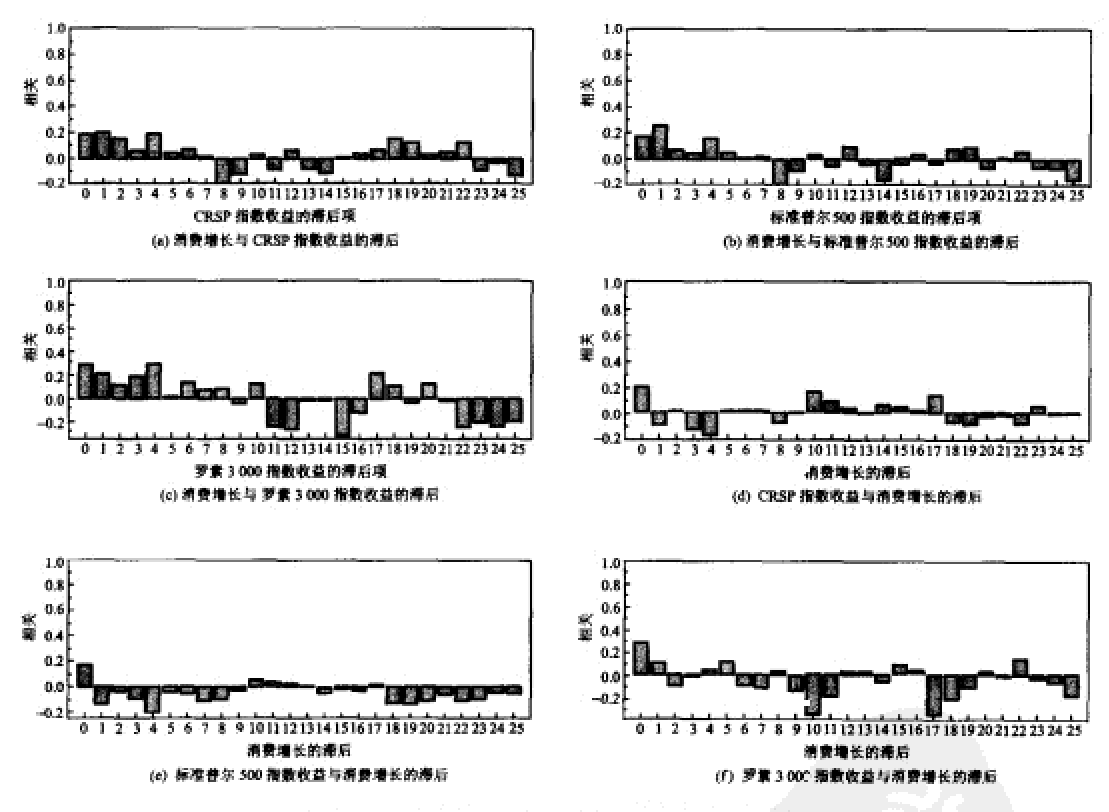


图 3.26　消费增长率与指数收益率的相关图

从图 3.27 、图 3.28 和图 3.29 可以看出，当期消费增长率和各指数当期收益率之间、当期消费增长率和滞后一期的各指数收益率之间、滞后一期的消费增长率和各指数当期收益率之间很难找出什么趋势。

所以，由这些图我们不难得出如下判断：现实生活中，消费增长率和指数收益率之间的相关性是非常弱的，消费增长率和指数收益率之间几乎没有什么趋势可言。消费增长率和资产回报的低相关性，使得在标准的 CCAPM 模型下，要想得到较高的股权溢价，只有把相对风险厌恶系数提高至非常不合理的程度。

在下面的对 CRRA,Abel 和 Constantinides 效用函数形式下的定价误差的实证分析当中，我们将清楚地看到这种低相关性对定价误差所造成的影响。

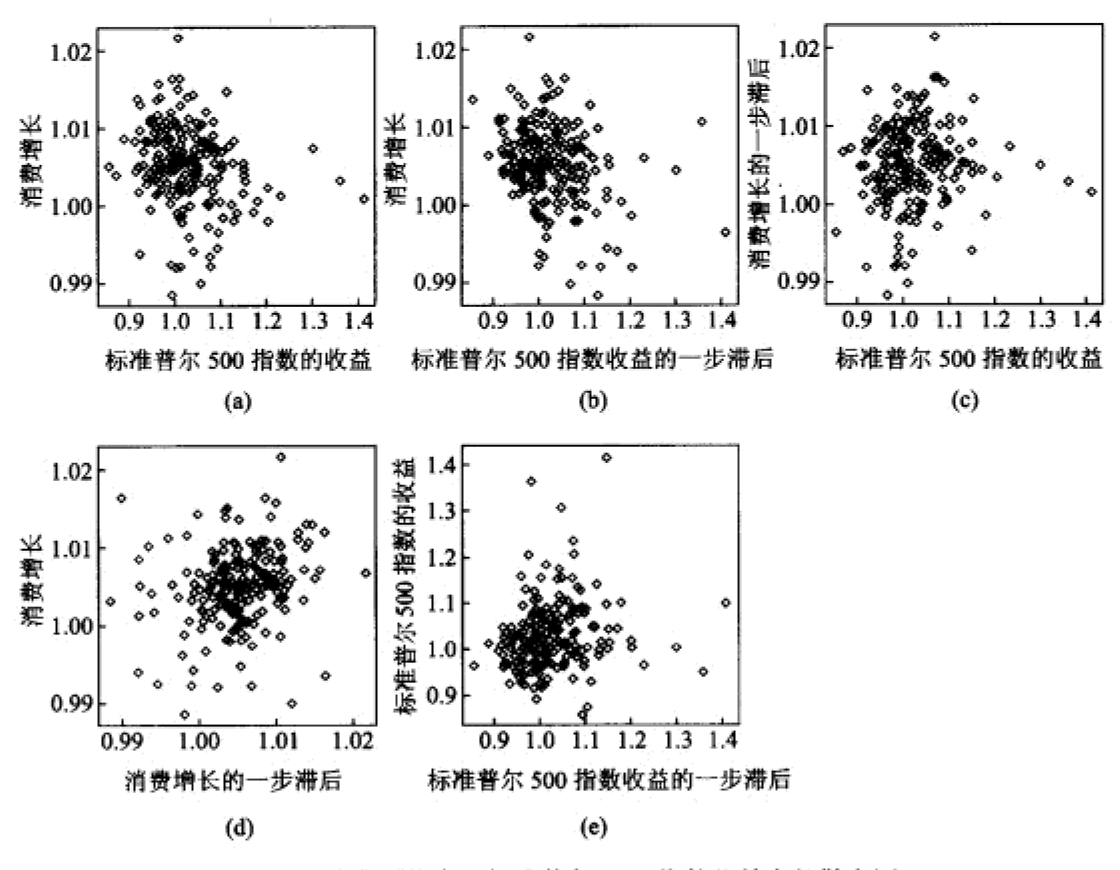
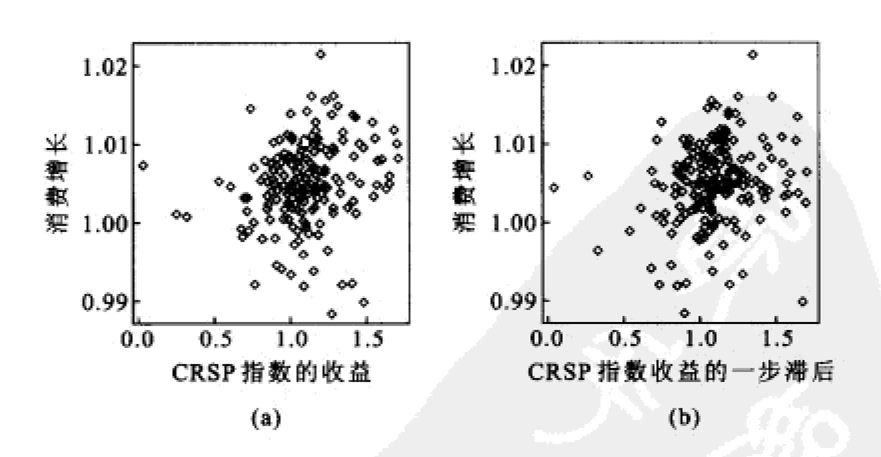
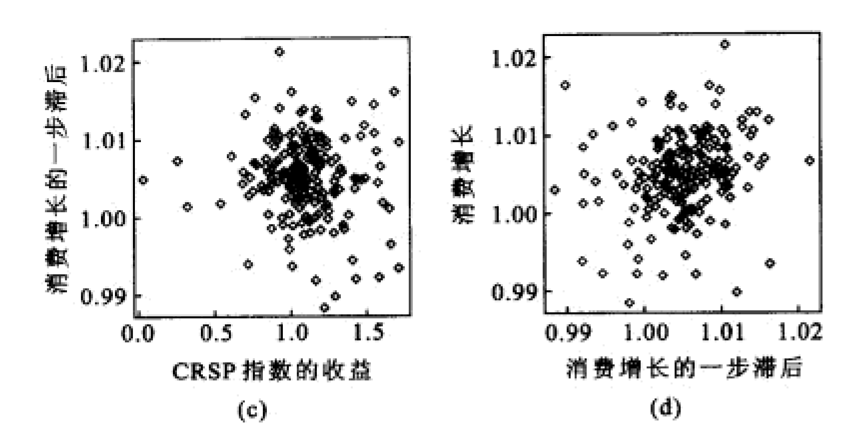


图 3.27　消费增长率和标准普尔 500 指数收益率的散点图





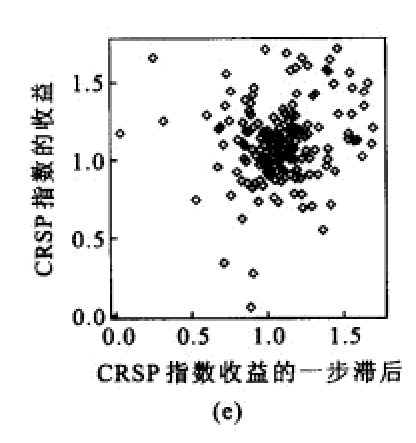
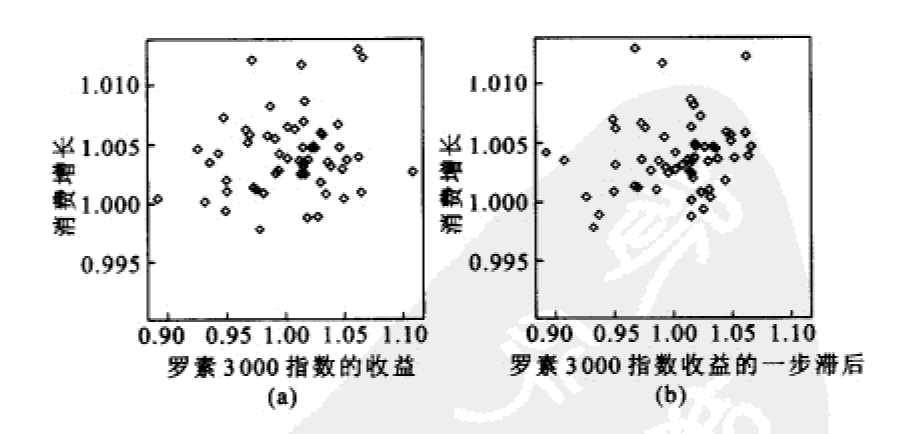


图 3.28 消费增长率和 CRSP 指数收益率的散点图



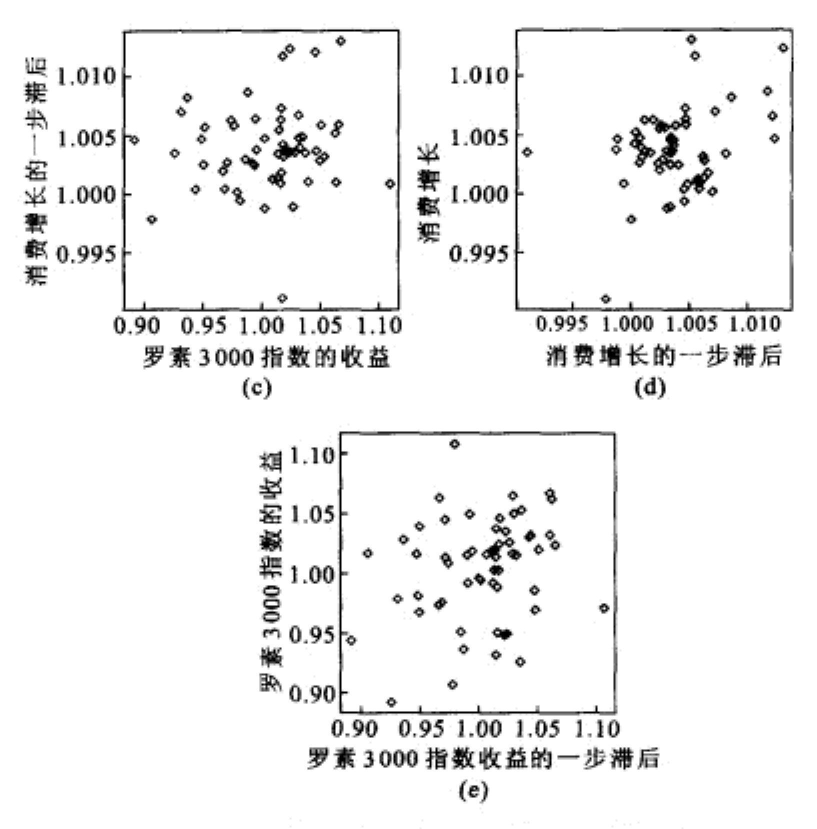


图 3.29 消费增长率和罗素 3000 指数收益率的散点图

§3.8.2.3 CRRA 效用函数形式下的定价误差

$\hat{M}$ 形如 (3.8.24) 式. 表 3.1 是 M 为线性函数时 CRRA 效用函数形式下的定价误差，表 3.2 是 M 为幂函数时 CRRA 效用函数下的定价误差.

我们先来看 M 为线性函数时，CRRA 效用函数形式下的定价误差情况. 由表 3.1 易见，定价误差主要来自于随机贴现因子不完全相关带来的定价误差以及均值差异带来的定价误差两部分. 而且当相对风险厌恶系数增加时，均值差异带来的误差加大，定价误差呈上升趋势，由 2% 升至 12.8% . 这正如 Weil(1989) 所指出的，对于这一标准的效用函数形式，通过增加相对风险厌恶系数来获得一个高的股权溢价，难以避免无风险利率极高的难题. 换句话说，相对风险厌恶系数的增加，会使得无风险利率之谜变得更加突出.

当 M 为幂函数时，由表 3.2 可以看出，与 M 为线性函数相比，定价误差并没有得到非常大的改善. 随着相对风险厌恶系数的上升，定价误差呈现出与 M 为线性函数时类似的特征，但变化幅度相对较小. 整体来看，定价误差要小于 M 为线性函数时的定价误差.

表 3.1　CRRA 效用函数形式下的定价误差 (M 为线性函数)

($\beta = 0.95$)

γ	b_ρ	b_σ	b_m	α	$c_\rho/\%$	$c_\sigma/\%$	$c_m/\%$
5	−0.020	−0.004	0.044	0.020	30	6	64
15	−0.020	−0.004	0.091	0.067	17	3	80
30	−0.021	−0.003	0.152	0.128	12	2	86

注：$c_\rho = |b_\rho|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$
$c_\sigma = |b_\sigma|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$
$c_m = |b_m|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$

表 3.2　CRRA 效用函数形式下的定价误差 (M 为幂函数)

($\beta = 0.95$)

γ	b_ρ	b_σ	b_m	α	$c_\rho/\%$	$c_\sigma/\%$	$c_m/\%$
5	−0.021	−0.005	0.006	−0.020	66	16	18
15	−0.021	−0.004	0.052	0.027	27	6	67
30	−0.022	−0.003	0.113	0.088	16	2	82

注：$c_\rho = |b_\rho|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$
$c_\sigma = |b_\sigma|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$
$c_m = |b_m|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$

§3.8.2.4　Abel 效用函数和 Constaninides 效用函数形式下的定价误差

$\hat{M}$ 分别形如 (3.8.25) 和 (3.8.26) 式. 表 3.3 是 M 为线性函数时 Abel 效用函数形式下的定价误差，表 3.4 是 M 为幂函数时 Abel 效用函数下的定价误差，表 3.5 是 M 为线性函数时 Constaninides 效用函数形式下的定价误差，表 3.6 是 M 为幂函数时 Constaninides 效用函数下的定价误差.

我们先来看 M 为线性函数时，考虑消费习惯的 Abel 效用函数和 Constaninides 效用函数形式下的定价误差情况. 由表 3.3 和表 3.5 易见，定价误差主要来自于随机贴现因子不完全相关带来的定价误差以及均值差异带来的定价误差两部分.

表 3.3　Abel 效用函数形式下的定价误差 (M 为线性函数)

($\beta = 0.95$)

γ	b_ρ	b_σ	b_m	α	$c_\rho/\%$	$c_\sigma/\%$	$c_m/\%$
5	−0.018	−0.006	0.045	0.021	26	9	65
15	−0.018	−0.005	0.041	0.018	28	8	64
30	−0.019	−0.003	0.003	−0.019	76	12	12

注：$c_\rho = |b_\rho|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$
$c_\sigma = |b_\sigma|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$
$c_m = |b_m|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$

表 3.4 Abel 效用函数形式下的定价误差 (M 为幂函数)

($\beta = 0.95$)

γ	b_ρ	b_σ	b_m	α	$c_\rho/\%$	$c_\sigma/\%$	$c_m/\%$
5	−0.019	−0.007	0.007	−0.019	58	21	21
15	−0.019	−0.006	0.003	−0.022	70	21	9
30	−0.020	−0.004	−0.035	−0.059	33	7	60

注：$c_\rho = |b_\rho|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$
$c_\sigma = |b_\sigma|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$
$c_m = |b_m|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$

表 3.5 Constantinides 效用函数形式下的定价误差 (M 为线性函数)

($\beta = 0.95, \gamma = 5$)

φ	b_ρ	b_σ	b_m	α	$c_\rho/\%$	$c_\sigma/\%$	$c_m/\%$
0.1	−0.020	−0.005	0.044	0.019	29	7	64
0.5	−0.019	−0.006	0.043	0.018	28	9	63
0.9	−0.019	−0.001	0.001	−0.019	90	5	5

($\beta = 0.95, \gamma = 15$)

φ	b_ρ	b_σ	b_m	α	$c_\rho/\%$	$c_\sigma/\%$	$c_m/\%$
0.1	−0.020	−0.004	0.090	0.066	17	3	80
0.5	−0.019	−0.004	0.082	0.059	18	4	78
0.9	−0.023	0.009	−0.414	−0.428	5	2	93

注：$c_\rho = |b_\rho|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$
$c_\sigma = |b_\sigma|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$
$c_m = |b_m|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$

表 3.6 Constantinides 效用函数形式下的定价误差 (M 为幂函数)

($\beta = 0.95, \gamma = 5$)

φ	b_ρ	b_σ	b_m	α	$c_\rho/\%$	$c_\sigma/\%$	$c_m/\%$
0.1	−0.021	−0.006	0.006	−0.021	64	18	18
0.5	−0.019	−0.006	0.005	−0.020	63	20	17
0.9	−0.020	−0.002	−0.038	−0.060	34	3	63

($\beta = 0.95, \gamma = 15$)

φ	b_ρ	b_σ	b_m	α	$c_\rho/\%$	$c_\sigma/\%$	$c_m/\%$
0.1	−0.021	−0.005	0.052	0.026	27	6	67
0.5	−0.020	−0.004	0.044	0.020	29	6	65
0.9	−0.024	0.009	−0.453	−0.468	5	2	93

注：$c_\rho = |b_\rho|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$
$c_\sigma = |b_\sigma|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$
$c_m = |b_m|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$

对于 Abel 效用函数，当相对风险厌恶系数增加时，均值差异带来的误差呈下降趋势，定价误差有所减小，从绝对值来看，误差分别下降了 0.3 和 3.8 个百分点，当相对风险厌恶系数取值较大 (如 30) 时，误差则由正转为负. 与 CRRA 效用函数相比， Abel 效用函数形式下定价误差要偏小些.

对于 Constantinides 效用函数，当参数 γ 的取值增大时，定价误差明显加大，当 γ 取值不变时，随着 φ 值的上升，或者说前期消费惯性的逐渐加大，定价误差先是由大变小，但当前期消费惯性越来越大时，模型的定价误差反而由小变大，此时，正的偏差转为负的偏差. 当 γ 取值为 5 时，定价误差的变化情况与 Abel 效用函数类似，与 CRRA 效用函数相比，整体误差要略小.

当 M 为幂函数时，由表 3.4 和 3.6 可以看出，与 M 为线性函数相比，定价误差改善不大.

对于 Abel 效用函数，当相对风险厌恶系数上升时，与 M 为线性函数时的变化相反，定价误差呈增大趋势. 总的说来，模型的定价误差要高于 M 为线性函数时的定价误差. 不过，与 CRRA 效用函数相比， Abel 效用函数形式下定价误差要小一些.

对于 Constantinides 效用函数，随着参数值 γ 的增大，模型定价误差的变化情况基本与 M 为线性函数时类似，但幅度要小很多. 当 γ 取值为 5 时，随着前期消费惯性的增强，定价误差呈增大趋势，与 M 为线性函数时相比，误差要大一些。与 Abel 效用函数相比，两者比较接近，与 CRRA 效用函数相比，误差则要小一些.

由于 Abel 效用函数和 Constantinides 效用函数考虑到了消费习惯的影响，较之 CRRA 效用函数有所改进，而这一改进对缓解无风险利率之谜起到了一定的效果，这是因为受消费习惯的影响，消费的波动性会降低. 但对改善因随机贴现因子不完全相关所带来的定价误差却不会起到明显的作用.

§3.8.2.5 有效国际资产组合的定价误差

我们知道，在 CAPM 模型中，随机贴现因子

$$M = a + bR_m \tag{3.8.29}$$

其中 $a = 1/R^f - bE(R_m)$,$b = -(E(R_m) - R^f)/(R^f\sigma^2_{R_m})$, R^f 为无风险资产的收益， R_m 为市场组合的收益.

考虑一个位于有效前沿的国际资产组合,该组合由两个国家的资产所组成,假定这两个国家的资本市场是分割的，两国的资产收益不相关 (如中国和美国),投资于一国资产的比例为 w_1, 投资于另一国资产的比例为 w_2,$w_1 + w_2 = 1$, 则此

时，随机贴现因子中的

$$R_m = w_1 R_{1m} + w_2 R_{2m}$$

其中 R_{1m} 表示第一个国家的市场组合 (如中国的上证综合指数) 的收益， R_{2m} 表示第二个国家的市场组合 (如美国的标准普尔 500 指数) 的收益，显然， R_m 是由二维随机变量所张成的。

如果我们在定价过程中，用一国的市场组合 (如美国的标准普尔 500 指数) 来给另一国家 (如中国) 资本市场上的资产进行定价，我们会发现，定价误差将是巨大的。

取 $\hat{M} = a + bR_{2m}$，此时随机贴现因子是一元随机变量的函数，在定理 3.8.2 的证明过程中，我们曾得到如下关系式

$$E(R) - R^f = -R^f \mathrm{Ccv}(M, R) \tag{3.8.30}$$

设 R_1 为第一个国家任意一个风险资产的毛收益，用 $\hat{M}$ 对其进行定价，有

$$\begin{aligned} E(R_1) - R^f &= -R^f \mathrm{Cov}(\hat{M}, R_1) \\ &= -bR^f \mathrm{Cov}(R_{2m}, R_1) \\ &= -bR^f \rho_{R_{2m},R_1} \sigma_{R_{2m}} \sigma_{R_1} \end{aligned}$$

由于这两个国家的资产收益是不相关的 ($\rho_{R_{2m},R_1} = 0$)，故上面的定价结果是第一个国家的股权溢价为零！这是不可能的。

这一例子表明，随机贴现因子空间和资产回报空间是否具有相同的结构对资产的定价至关重要。

我们还用实际数据作了验证。所选数据如下：标准普尔 500 指数，上证综合指数，上证 180 指数，中国石化、浦发银行和上海机场的价格与收益率的日数据，一年期国债的收益率数据，数据时间段为 2002 年 1 月 4 日 —2003 年 12 月 31 日 ①。

表 3.7 是标准普尔 500 指数与上证综合指数，上证 180 指数，中国石化、浦发银行和上海机场的日收益率的相关系数。表 3.8 是用标准普尔 500 指数对上证 180 指数、中国石化、浦发银行和上海机场进行定价的误差情况。表 3.9 是实际股权溢价与用标准普尔 500 指数定价得出的股权溢价对比。

---

① 标准普尔 500 指数的日收益率数据来自于 Yahoo 网站的金融主页，其他数据来自于大智慧股票分析系统。

表 3.7 显示，标准普尔 500 指数与上证综合指数，上证 180 指数，中国石化、浦发银行和上海机场的日收益率的相关系数非常低 (相关系数的绝对值不超过 0.02)，它们之间几乎没有什么相关性可言。

从表 3.8 中可以看出，以标准普尔 500 指数对中国股票市场的上述资产进行定价，误差主要来自于随机贴现因子不完全相关带来的定价误差，所占比例都在 90% 以上。

表 3.9 则直接验证了前面的推论，以标准普尔 500 指数对中国的风险资产进行定价所得出的股权溢价非常小，均在 −1% 到 1% 之间，与实际股权溢价相比，两者相差悬殊。以中国石化为例，实际股权溢价为 23.38%，但由标准普尔 500 指数定价得出的股权溢价却是 −1.26%，两者大相径庭！

从上述检验结果可以看出，如果定价的随机贴现因子空间选取得不当，将会造成巨大的定价误差。

表 3.7　日收益率相关系数

	上证综合	上证 180	中国石化	浦发银行	上海机场
标准普尔 500	0.0118	0.0115	0.0123	0.0080	−0.0097

表 3.8　以标准普尔 500 指数对中国市场上的股票资产进行定价的误差

风险资产	b_ρ	b_σ	b_m	α	c_ρ/%	c_σ/%	c_m/%
上证 180	0.26	0.0016	0.00	0.26	99	1	0
中国石化	0.08	0.0020	0.00	0.08	98	2	0
浦发银行	0.02	0.0020	0.00	0.02	91	9	0
上海机场	0.07	−0.0013	0.00	0.07	98	2	0

注：$c_\rho = |b_\rho|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$
$c_\sigma = |b_\sigma|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$
$c_m = |b_m|/(|b_\rho| + |b_\sigma| + |b_m|)$

表 3.9　股权溢价对比

风险资产	实际股权溢价 /%	以标准普尔 500 定价的股权溢价 /%	两者之差 /%
上证 180	−5.95	−1.18	−4.77
中国石化	23.38	−1.26	24.64
浦发银行	−14.32	−0.82	−13.50
上海机场	25.74	0.99	24.75

§3.9 总结

在本章中我们首先讨论了最重要的无套利原理，其次讨论了有效投资组合的三种等价形式和两基金分离定理，第三我们引入了反映市场过度自信或过度悲观下的“非经典”资产定价模型，第四讨论了如何确定无风险利率以及著名的股权溢价之谜，最后我们讨论了如何评估一个定价模型的办法.



第4章

金融工具的定价

§4.1 股票定价

§4.1.1 股票的市盈率估值方法

由上面的 Feb 模型我们知道市盈率的倒数受市场债券收益率水平的密切影响. 但具体到个股, 市场的市盈率估值水平就非常不一致, 按照彼得 · 林奇的简单算法, 一个 10 倍市盈率估值的个股意味着 10 年收回投资, 一个 60 倍市盈率意味着 60 年收回投资. 一般来讲, 人们认为高市盈率与成长型股票联系在一起, 低市盈率与价值型股票联系在一起, 如 Fama 和 French 于 1993 年通过同时做多高市盈率组合和做空低市盈率组合来构造市场的 HML 因子。

但这些经验的讨论没有给像市盈率这样的倍数估值方法一个坚实的理论基础. 下面我们将介绍 Leibowitz 等人建立的 "特许经营因素"(Franchise Factor) 模型. 它事实上是将 Fed 模型推广到个股层面. 由 Fed 模型, 我们知道

$$\frac{E}{P}=k+\varepsilon$$

其中 k 是市场要求的回报, ε 是未知项, 这样我们知道市盈率

$$\frac{P}{E}=\frac{1}{k+\varepsilon}=\frac{1}{k}+\frac{-\varepsilon}{k(k+\varepsilon)} \tag{4.1.1}$$

$$=\text{市场的市盈率}+\eta \tag{4.1.2}$$

Leibowity 证明了下列的定理.

定理 当股价服从 Gordon 公式时,

$$\eta=FF\cdot G \tag{4.1.3}$$

其中 $FF=\frac{ROE-k}{ROE\cdot k}$ 和 $G=\frac{g}{k-g}$, ROE 为净资产回报率， g 为盈利增长率。

证明：由 Gordon 公式，

$$P_0=\frac{d_1}{k-g} \tag{4.1.4}$$

其中 d_1 为下一期的分红。

由于 $d_1=\alpha E_1$, 其中 α 为分红比率， E_1 为下一期的盈利，这样我们得到市盈率

$$\frac{P_0}{E_1}=\frac{\alpha}{k-g}$$

记 β 为公司盈利留存的比例 (Earning Retention Rate), 即 $\beta=1-\alpha$, 我们有净资产增加的公式

$$B_t=B_{t-1}+\beta E_t \tag{4.1.5}$$

其中 B_t 为公司在第 t 期的净资产值， E_t 为公司在第 t 期的净利润．由于 $E_t=ROE\cdot B_{t-1}$(注意，这里我们假定分红比例，盈利留存比例，净资产收益率均不变化)．我们有

$$B_t=B_{t-1}+\beta\cdot ROE\cdot B_{t-1} \tag{4.1.6}$$

$$=(1+\beta\cdot ROE)B_{t-1} \tag{4.1.7}$$

$$=(1+\beta\cdot ROE)^t B_0 \tag{4.1.8}$$

在推导 Gordon 公式时，我们假定

$$d_t=(1+g)^{t-1}d_1 \tag{4.1.9}$$

由于 $d_t=\alpha\cdot E_t=\alpha\cdot ROE\cdot B_{t-1}$, 我们有

$$\alpha\cdot ROE\cdot B_{t-1}=(1+g)^{t-1}\cdot\alpha\cdot ROE\cdot B_0 \tag{4.1.10}$$

即

$$B_{t-1}=(1+g)^{t-1}B_0 \tag{4.1.11}$$

这样，我们得到盈利增长与净资产增长率的关系

$$g=\beta\cdot ROE \tag{4.1.12}$$

特别地，如果公司从来不分红的话，即 $\beta=1$, 我们有

$$g=ROE \tag{4.1.13}$$

将上式代入 Gordon 公式 后，我们得到

$$\frac{P_0}{E_1} = \frac{\alpha}{k-g} = \frac{1-\beta}{k-ROE\cdot\beta} \tag{4.1.14}$$

$$= \frac{1}{k}\left(1+\frac{\beta(ROE-k)}{k-ROE\cdot\beta}\right) \tag{4.1.15}$$

$$= \frac{1}{k}\left(1+\frac{\beta(ROE-k)}{k-g}\right) \tag{4.1.16}$$

$$= \frac{1}{k}+\frac{ROE-k}{k}\cdot\frac{\beta}{k-g} \tag{4.1.17}$$

$$= \frac{1}{k}+\frac{ROE-k}{k\cdot ROE}\cdot\frac{g}{k-g} \tag{4.1.18}$$

$$= \frac{1}{k}+FF\cdot G \tag{4.1.19}$$

□

这里我们需要讨论一下 FF(Franchise Factor) 和 G(Growth Equivalent) 的含义. G 的金融含义很明确，由简单的几何展开，我们知道

$$G = \frac{g}{1+k}\left(1+\frac{1+g}{1+k}+\frac{(1+g)^2}{(1+k)^2}+\cdots\right) \tag{4.1.20}$$

由于 k 是风险调整下的折现率，因此 G 是未来公司增长率的折现值. 公司未来越具有成长性 (即 g 越高) 或者投资者要求的折现率越低，则增长率的折现值 G 越高.

FF 因子的含义是，当 $FF>0$ 一个公司能够获得超过市场要求的回报水平 k 的净资产收益率 ROE 的水平一定是这家公司拥有某种其他公司不具备的优势 (市场垄断、国家特许、行业领先、管理优势、成本优势、生产边际优势等)，这种优势统称为经济特许权价值 (Economic Francise Value) 。

同样，与 EVA 的价值原理一样，公司只能投资于超过市场平均回报水平 k 的项目才会为股东创造价值，市场才会给超过市场平均价值 $1/k$ 水平的估值.

其次上述公式也证明我们一开始的讨论，市场会给那些具备高成长性的公司远超过市场平均水平的估值，即所谓成长股票. 反过来讲，当预期一个公司未来的盈利增长率下降，进而导致净资产收益水平低于市场平均水平，从而给出极低的估值，进入所谓价值股票.

虽然对于 ROE 和高成长率 g 市场都会给予较高的估值水平，但上式经济特许公式中可以看出市场对 ROE 和 g 的不同看法.

案例分析：设有四个公司，它们具有的特征如表 4.1 所示. 图 4.1 绘出了这四个公司在 “ ROE— 净利润增长率” 平面上的位置.

表 4.1 Franchise 经济特许权模型

Franchise 模型		公司A	公司B	公司C	公司D
盈利特征	每股净资产 / 元	100	100	100	100
	ROE/%	12	12	15	15
	每股净利润 / 元	12	12	15	15
	分红比例 /%	33	100	100	33
	每股分红 / 元	4	12	15	5
	股息收益率 /%	4	12	12	2
成长特征	净利润增长率 /%	8	0	0	10
估值	无风险利率 /%	3	3	3	3
	股权溢价 /%	9	9	9	9
	β 系数	1	1	1	1
	市场要求的投资回报水平 k/%	12	12	12	12
	DDM 模型价格 / 元	100	100	125	250
	市盈率 PE	8.33	8.33	8.33	16.67
	市净率 PB	1	1	1.25	2.5

Franchise 模型的值	公司A	公司B	公司C	公司D
ROE/%	12	12	15	15
净利润增长率 g/%	8	0	0	10
经济特许权因素 FF	0	0	1.67	1.67
未来净利润增长率的净现值 G/%	200	0	0	500
市场基本市盈率 PE	8.33	8.33	8.33	8.33
个股超额市盈率 PE	0	0	0	8.33

注：公司 A 为稳定成长型公司，公司 B 为没有成长性的公司，公司 C 为没有成长性但高 ROE 的公司，公司 D 为高成长和高 ROE 型公司。

从表 4.1 和图 4.1 我们可以看出，市场最欢迎的是既有成长性又有高 ROE 的公司，光有成长性是不足以让市场给出一个高一些的估值，只有在成长性带给股东足够的 ROE 投资回报后，市场才会给出较高的估值。

从中国证券市场来看，像那些大盘蓝筹股 (Blue-chip) 中国石油 、中国移动、中国银行等，由于国家给了它们某种行业的特许经营权，因此可以预期其 FF 因子是正的，但市场能否给予较高估值的关键是其是否具备成长性，是否具有较高的成长性的净现值 G . 那些周期性的行业公司，虽然在一段时间内拥有较多的成长性，但由于其盈利的波动性较大，因此成长净现值 G 不会太高 (因 G 是未来成长性的加权平均)，这也说明像宝钢这样的公司，虽然拥有较强的经

济特许权，但市场总是给予 5 倍左右的市盈率估值，不是很高。

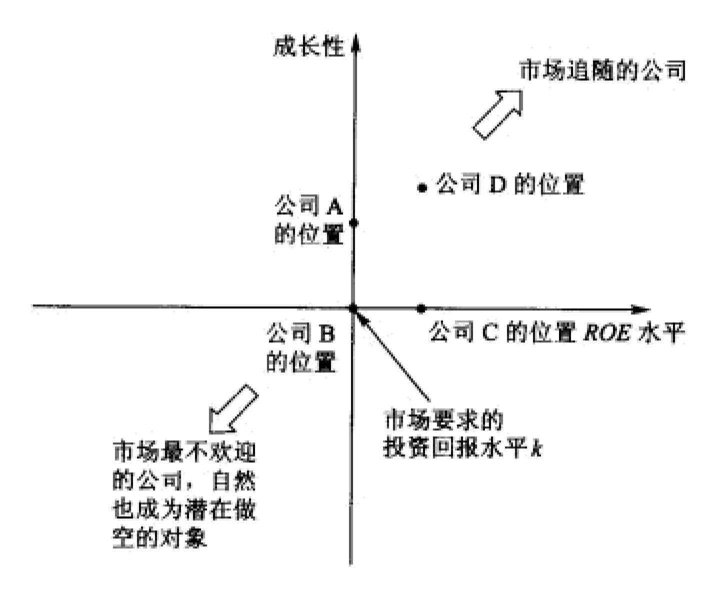


图 4.1　四种净资产收益率和盈利增长

另外，从上述讨论中我们也可以看出公司的股息政策对公司的估值影响不大，像早期的微软公司和现在的谷歌公司，由于拥有行业垄断和较高的 G 值，虽然没有分红，但市场仍然给予较高的估值。现在的微软已不具备高成长性，因此也开始分红了，从一个成长股进入一个价值股了。

事实上这也反映了 ROE 和成长性的均值回归原理，永远的高 ROE 和高成长性的公司是没有的，公司的发展存在一个期限结构，高成长的公司最后会变得平庸，处于困境的公司最后会增加 ROE，见图 4.2 、图 4.3 和图 4.4 。

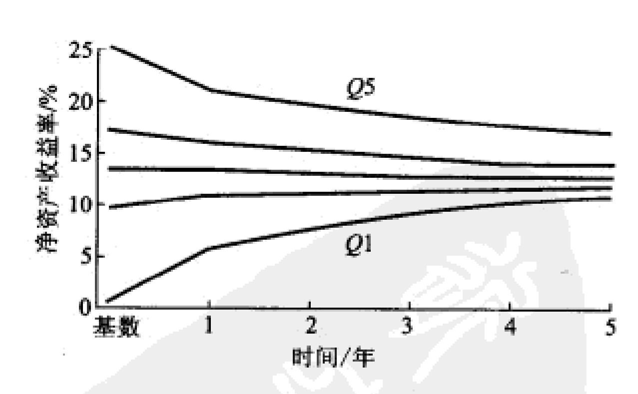


图 4.2　美国净资产收益率均值回归期限图

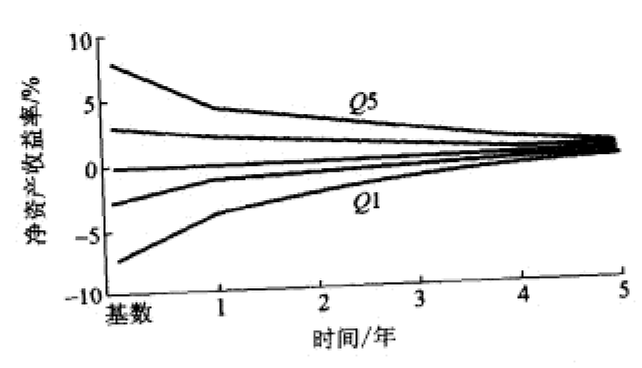


图 4.3 国际净资产收益率均值回归期限图

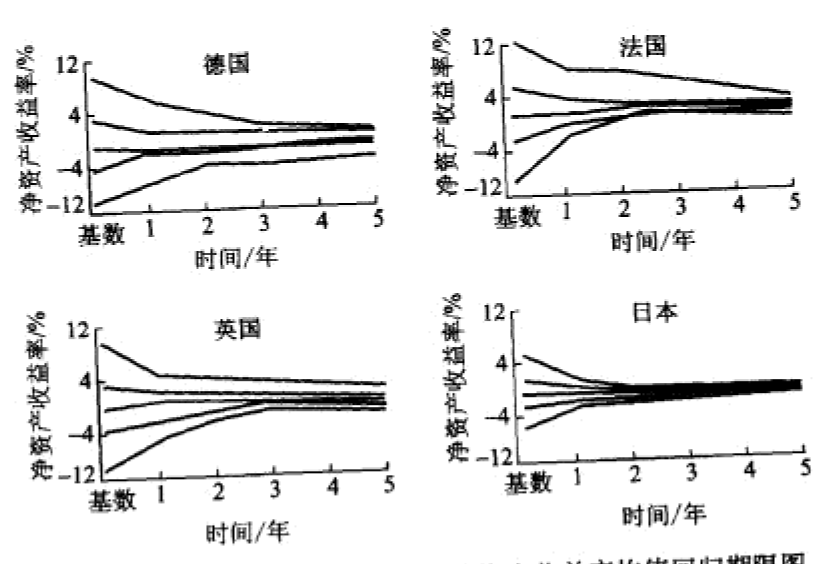


图 4.4 德国、法国、英国和日本的净资产收益率均值回归期限图

下面四个表表明在 ROE 和成长性 g 处于不同状态下市场的估值变化.

高 ROE和高成长 g

ROE/%	FF	g/%	G/%	PE 估值
13.00	0.64	2.00	20	8.46
15.00	1.67	2.50	26	8.77
17.00	2.45	3.00	33	9.15
19.00	3.07	3.50	41	9.60
21.00	3.57	4.00	50	10.12
23.00	3.99	4.50	60	10.72
25.00	4.33	5.00	71	11.43
27.00	4.63	5.50	85	12.25

续表

$ROE/\%$	FF	$g/\%$	$G/\%$	PE 估值
29.00	4.89	6.00	100	13.22
31.00	5.11	6.50	118	14.37
33.00	5.30	7.00	140	15.76
35.00	5.48	7.50	167	17.46
37.00	5.63	8.00	200	19.59
39.00	5.77	8.50	243	22.34
41.00	5.89	9.00	300	26.02
43.00	6.01	9.50	380	31.16
45.00	6.11	10.00	500	38.89
47.00	6.21	10.50	700	51.77
49.00	6.29	11.00	1100	77.55
51.00	6.37	11.50	2300	154.90

高 ROE和低成长 g

$ROE/\%$	FF	$g/\%$	$G/\%$	PE 估值
13.00	0.64	2.00	20	8.46
15.00	1.67	2.05	21	8.68
17.00	2.45	2.10	21	8.85
19.00	3.07	2.15	22	9.00
21.00	3.57	2.20	22	9.14
23.00	3.99	2.25	23	9.25
25.00	4.33	2.30	24	9.36
27.00	4.63	2.35	24	9.46
29.00	4.89	2.40	25	9.55
31.00	5.11	2.45	26	9.64
33.00	5.30	2.50	26	9.73
35.00	5.48	2.55	27	9.81
37.00	5.63	2.60	28	9.89
39.00	5.77	2.65	28	9.97
41.00	5.89	2.70	29	10.04
43.00	6.01	2.75	30	10.12
45.00	6.11	2.80	30	10.19
47.00	6.21	2.85	31	10.27
49.00	6.29	2.90	32	10.34
51.00	6.37	2.95	33	10.41

稳定 ROE和低成长 g

$ROE/\%$	FF	$g/\%$	$G/\%$	PE 估值
13.00	0.64	2.00	20	8.46
13.02	0.65	2.05	21	8.47
13.04	0.66	2.10	21	8.47

续表

$ROE/\%$	FF	$g/\%$	$G/\%$	PE 估值
13.06	0.68	2.15	22	8.48
13.08	0.69	2.20	22	8.49
13.10	0.70	2.25	23	8.49
13.12	0.71	2.30	24	8.50
13.14	0.72	2.35	24	8.51
13.16	0.73	2.40	25	8.52
13.18	0.75	2.45	26	8.52
13.20	0.76	2.50	26	8.53
13.22	0.77	2.55	27	8.54
13.24	0.78	2.60	28	8.55
13.26	0.79	2.65	28	8.56
13.28	0.80	2.70	29	8.57
13.30	0.81	2.75	30	8.58
13.32	0.83	2.80	30	8.58
13.34	0.84	2.85	31	8.59
13.36	0.85	2.90	32	8.60
13.38	0.86	2.95	33	8.61

低 ROE和低成长 g

$ROE/\%$	FF	$g/\%$	$G/\%$	PE 估值
5.00	−11.67	2.00	20	6.00
5.00	−11.67	2.05	21	5.93
5.00	−11.67	2.10	21	5.86
5.00	−11.67	2.15	22	5.79
5.00	−11.67	2.20	22	5.71
5.00	−11.67	2.25	23	5.64
5.00	−11.67	2.30	24	5.57
5.00	−11.67	2.35	24	5.49
5.00	−11.67	2.40	25	5.42
5.00	−11.67	2.45	26	5.34
5.00	−11.67	2.50	26	5.26
5.00	−11.67	2.55	27	5.19
5.00	−11.67	2.60	28	5.11
5.00	−11.67	2.65	28	5.03
5.00	−11.67	2.70	29	4.95
5.00	−11.67	2.75	30	4.86
5.00	−11.67	2.80	30	4.78
5.00	−11.67	2.85	31	4.70
5.00	−11.67	2.90	32	4.62
5.00	−11.67	2.95	33	4.53

注记 1 (慎用美联储 Fed 模型)　多亏了过去两个月的低迷行情，现在股市的估值要比债市好得多。但股票的长期回报率恐怕仍会让人提不起精神来。

这样好坏参半的结论是基于美国联邦储备委员会 (Fed) 的模型作出的，它是使用最广的股市估值模型之一，也是最常被滥用的股市估值模型之一。

有没有把自己想像成一位业余投资策略师？以下内容告诉你如何在家运用 Fed 模型。

模型行为

首先，你得找出标准普尔 500 指数成份股的预期收益。有关数字可以在标准普尔公司 (Standard & Poor's) 的网站 www.spglobal.com 上找到。标准普尔公司是 McGraw-Hill 的子公司。点击链接"标准普尔 500 指数成份股收益"(S & P 500 Index Earnings)，然后就可以找到名为"标准普尔 500 指数成份股收益和预测报告"(S & P 500 Earnings and Estimate Report) 的表格。

根据这个网站的数字，2005 年的收益应该在 67.40 左右。该预测已经经过调整，以便可以与标准普尔 500 指数的价值相比较，该指数最近一直在 1150 点附近徘徊。

通常，投资者会用 1150 除以预期收益 67.40，得出市盈率 PE，目前市盈率为 17 。但根据 Fed 模型，你要进行反向计算，即用 67.40 除以 1150，这样便得出"公司收益率"(E/P) 为 5.9% 。

然后你把这个"公司收益率"5.9% 与 10 年期国债的收益率 4.2% 相比较。当"公司收益率"高于国债收益率，就像现在一样，这表明股市比债市便宜。

当然，债券投资者对现金感兴趣，而股东仅得到少量股息。公司剩余的利润又被投入业务，以推动进一步的增长。尽管如此，推测起来，管理层也可能停止寻求增长，而将公司收益的相当一大部分作为股息派发给股东。

失效

看起来合情合理？不幸的是，Fed 模型存在着大量的问题。

对于新手而言，这个模型经常偏向于股票。Fed 模型的追随者通常使用营运收益而不是净收益，营运收益因为没有包括一次性会计支出项目要高于净收益。更糟糕的是，分析师通常对他们的收益预测都过于乐观，从而进一步提高了股市表面上的收益率。

在 2001 年之前，标准普尔 500 指数成份股的收益率通常与 30 年期国债收益率相比较。但 2001 年年末，政府宣布将停止发售 30 年期国债，Fed 模型的使用者便转而将 10 年期国债作为参照。由于 10 年期国债收益率较低，

这立即使得股票更具有吸引力起来，或者说根据 Fed 模型来看是这样。

但这个模型最大的问题在于债券收益率和公司收益率实际上是不可比的。毕竟，国债利息在其期限内是固定的，你每年都能指望得到利息。

与此同时，公司收益则更加不确定，但应能随着时间的推移不断增加。确实，即便公司将全部收益都用来派息，其利润仍然趋于与通货膨胀一道攀升。

改进

宾夕法尼亚州大学沃顿商学院 (University of Pennsylvania's Wharton School) 全融学教授 Jeremy Siegel 声称，有一个方法可以解决这些问题。Siegel 是新书《投资者的未来》(The Future for Investors) 的作者。

他建议用 10 年期通货膨胀保值国债替代传统的 10 年期国债。运用通货膨胀保值国债作比较的话，你得到的收益率就是通货膨胀率外加一个小幅收益率，目前为 1.6%。由于通货膨胀保值国债及其支付的利息随着通货膨胀率的攀升而增加，因此这里的 1.6% 可以在真正意义上与标准普尔 500 指数的收益率 5.9% 相比较。

你可以看到，今天的公司收益率要远远高于通货膨胀保值国债的收益率。这并不足为奇。股票的风险更大，因此预期回报应该更高。关键的问题是，股票的收益率应该高出多少？

根据芝加哥的伊博森伙伴公司 (Ibbotson Associates) 提供的资料，过去八十年中，标准普尔 500 指数的收益率较国债的收益率每年要高出 5 个百分点。但 Siegel 教授认为未来几年两者的收益率之差将有所收窄。

实际上，他认为，如果公司收益率较通货膨胀保值国债收益率高出 2~3 个百分点，股票的价值将趋于合理。其中的含义就是，由于今天的股票收益率较通货膨胀保值国债收益率要高出 4 个百分点，因此，要么就是股票价格较低，要么就是像 Siegel 教授怀疑的那样，债券价格过高。

AQR 资本管理公司 (AQR Capital Management) 的对冲基金主管 Cliff Asness 一直在对 Fed 模型提出直率的批评。他说，使用通货膨胀保值国债替代传统的国债是一大改进。Asness 称，Siegel 将 Fed 模型从一个数学垃圾变成了一个合理的模型。

他还表示，股票收益率较国债收益率每年高出 2~3 个百分点是合理的。他说，有一种确凿的论点说，历史上投资者在股票方面做得太出色了，他们应该接受较低的收益率。问题是，他们会吗？

正如 Asness 预见的那样，投资者运用 Fed 模型来证明他们看涨股市是合



理的。但他不确定投资者是否愿意接受较低的收益率。

假设年通货膨胀率为 2.5%，通货膨胀保值国债的收益率较之高出 1.6 个百分点，而股票收益率较通货膨胀保值国债的收益率还要高出 4 个百分点。加起来后，得出股市的年回报率在 8% 以上，如果今天的收益预期过于乐观，股市的回报率可能会稍微低一些。

如果投资者认为这样的回报率不够怎么办？ Fed 模型可能会说股票值得逢低买盘。但那并不意味着股价不会进一步大幅走低。

§4.1.2 周期性公司的 PE解释度

对周期性公司 PE的解读方法一

根据超额收益 (Abnormal Earnings) 估值模型，我们可以得到 PE 比率的如下驱动因子：

$$\frac{P}{E}=\frac{1}{Ke}+\frac{g}{Ke-g}\cdot\left(\frac{1}{Ke}-\frac{1}{ROE}\right) \tag{4.1.21}$$

其中 $1/Ke$ 表示基础 PE 比率 (即无增长时的 PE),$g/(Ke-g)$ 表示增长机会的现值， $1/Ke-1/ROE$ 表示企业竞争优势指标 (又称 Franchise Factor)．

表 4.2 列出了沪深股市中一些周期性公司 PE 驱动因子分解的计算实例．

表 4.2 样本周期性公司 PE驱动因子分解

证券简称	Ke/%	g/%(2005E)	$1/Ke$	PE(2004EPS)	$1/Ke-1/ROE$	$g/(Ke-g)$
煤气化	13.71	46.44	7.30	9.90	−0.43	−6.04
西山煤电	13.10	45.74	7.63	7.86	1.56	0.14
兖州煤业	12.25	23.73	8.16	11.24	2.53	1.21
上海能源	12.27	15.41	8.15	9.66	2.98	0.51
佛塑股份	13.05	48.72	7.66	17.58	−14.17	−0.70
华鲁恒升	12.16	46.72	8.23	8.98	2.37	0.32
四川美丰	11.12	26.92	8.99	9.99	3.53	0.28
泸天化	12.04	37.13	8.31	12.81	1.52	2.96
中国石化	12.35	11.62	8.10	10.30	2.32	0.95
铜都铜业	12.68	45.12	7.88	10.88	−1.33	−2.25
锡业股份	14.39	18.09	6.95	8.42	2.38	0.62
鲁泰 A	11.08	19.72	9.03	10.29	3.38	0.37
振华港机	11.90	87.89	8.41	13.93	0.82	6.75
威孚高科	11.40	29.26	8.77	10.71	−0.60	−3.26
宇通客车	10.21	24.21	9.80	10.46	1.48	0.45
桂冠电力	11.38	41.41	8.79	11.85	−3.59	−0.85
中海发展	13.62	48.11	7.34	10.95	2.84	1.27

续表

证券简称	Ke/%	g/%(2005E)	$1/Ke$	PE(2004EPS)	$1/Ke-1/ROE$	$g/(Ke-g)$
招商银行	12.66	29.28	7.90	14.28	1.26	5.08
大厦股份	10.25	13.38	9.75	11.82	1.24	1.66
新兴铸管	11.10	11.04	9.01	6.65	3.47	−0.68
华菱管线	11.92	15.74	8.39	7.10	1.75	−0.74
首钢股份	12.13	−6.52	8.24	6.55	2.52	−0.67
武钢股份	12.97	66.82	7.71	8.34	2.28	0.27
酒钢宏兴	12.25	−4.61	8.16	4.26	3.64	−1.07
格力电器	11.99	31.29	8.34	12.96	2.54	1.82
郑州煤电	13.17	16.06	7.59	17.30	−2.18	−4.45
红星发展	12.03	17.22	8.31	12.95	1.34	3.46
扬农化工	11.87	20.15	8.42	16.82	−2.57	−3.27
营口港	12.91	52.37	7.74	26.34	−3.87	−4.80
云南铜业	13.42	0.05	7.45	12.00	−1.34	−3.39
凯诺科技	11.30	17.55	8.85	13.09	−0.75	−5.68
沪东重机	13.37	52.00	7.48	27.59	−0.17	−120.83
安徽合力	12.42	16.56	8.05	12.90	0.91	5.32
深天健	13.56	−22.45	7.37	20.10	−19.55	−0.65
腾达建设	13.42	−8.69	7.45	11.51	−1.36	−2.99
中铁二局	12.62	11.07	7.92	20.22	−17.59	−0.70
赣粤高速	10.36	21.75	9.66	20.57	−0.06	−175.61
北京巴士	9.54	64.52	10.48	32.79	−24.98	−0.89
江西长运	9.78	12.67	10.22	19.61	1.02	9.17
深圳机场	10.97	39.56	9.12	26.63	−1.98	−8.84
天房发展	13.69	203.25	7.31	77.63	−99.28	−0.71
通程控股	13.37	−9.86	7.48	28.02	−19.01	−1.08
广州友谊	12.68	52.18	7.89	26.23	−5.19	−3.54
小商品城	10.12	59.38	9.88	29.51	1.92	10.24
重庆百货	11.95	11.14	8.37	16.83	0.68	12.47
中科三环	10.24	52.12	9.76	21.37	3.33	3.48

注： 2005E 表示对 2005 年的预测； 2004EPS 表示根据 2004 年的 EPS 计算的.

资料来源：国信证券经济研究所.

我们把“增长机会现值”和“企业竞争优势”两个指标均大于零的公司定义为被市场看好的公司. 换句话说，一个被市场看好的公司意味着该公司能够在保持自身竞争优势 (体现在公司能够获得超过股权资本成本的净资产收益率) 的情况下实现长期增长. 这些公司“增长机会现值”指标所隐含的市场预期长期增长率可以计算如下：

$$PVGO=\frac{g}{Ke-g} \tag{4.1.22}$$

$$g = \frac{PVGO \cdot Ke}{1 + PVGO} \tag{4.1.23}$$

其中 $PVGO$ 表示增长机会现值，g 表示市场 PE 所隐含的预期长期增长率。

注：能够有效计算 g 的前提是 $Ke > g$ 。

从表 4.3 我们可以看到分析师对被市场看好的公司 2005 年收益增长率的主流预测均为正，说明二者对公司的看法是一致的。根据 $PVGO$ 计算出来的隐含市场预期增长率是长期增长率，该指标是解读市场对所研究公司预期的一个工具，可以被用作评判公司投资价值的一个标准。如果分析师认为隐含增长率太高，不大可能在长期内得到维持，则该公司的价值则存在着被市场高估的可能。反之，则公司的价值存在着被市场低估的可能。市场对公司的看法并不总是与分析师一致。表 4.4 中的四家钢铁公司体现了这种差异。

表 4.3　被市场看好的周期性公司及其隐含预期长期增长率

证券简称	Ke/%	g/% (2005E)	$1/Ke$	PE (2004EPS)	$1/Ke-1/ROE$	$PVGO$	隐含增长率 /%
西山煤电	13.10	45.74	7.63	7.86	1.56	0.14	1.65
兖州煤业	12.25	23.73	8.16	11.24	2.53	1.21	6.72
上海能源	12.27	15.41	8.15	9.66	2.98	0.51	4.13
华鲁恒升	12.16	46.72	8.23	8.98	2.37	0.32	2.93
四川美丰	11.12	26.92	8.99	9.99	3.53	0.28	2.45
泸天化	12.04	37.13	8.31	12.81	1.52	2.96	9.00
中国石化	12.35	11.62	8.10	10.30	2.32	0.95	6.01
锡业股份	14.39	18.09	6.95	8.42	2.38	0.62	5.50
鲁泰A	11.08	19.72	9.03	10.29	3.38	0.37	3.01
振华港机	11.90	87.89	8.41	13.93	0.82	6.75	10.36
宇通客车	10.21	24.21	9.80	10.46	1.48	0.45	3.15
中海发展	13.62	48.11	7.34	10.95	2.84	1.27	7.62
招商银行	12.66	29.28	7.90	14.28	1.26	5.08	10.58
大厦股份	10.25	13.38	9.75	11.82	1.24	1.66	6.40
武钢股份	12.97	66.82	7.71	8.34	2.28	0.27	2.80
格力电器	11.99	31.29	8.34	12.96	2.54	1.82	7.75
红星发展	12.03	17.22	8.31	12.95	1.34	3.46	9.33
安徽合力	12.42	16.56	8.05	12.90	0.91	5.32	10.45
江西长运	9.78	12.67	10.22	19.61	1.02	9.17	8.82
小商品城	10.12	59.38	9.88	29.51	1.92	10.24	9.22
重庆百货	11.95	11.14	8.37	16.83	0.68	12.47	11.07
中科三环	10.24	52.12	9.76	21.37	3.33	3.48	7.96

资料来源：国信证券经济研究所。

对于首钢股份和酒钢宏兴，市场对投资机会现值的看法与分析师对 2005 年收益增长的预测是一致的。但对于新兴铸管和华菱管线，在市场给出的投资机会现值为负的同时，分析师对这两家公司 2005 年收益增长的主流预测却为正。由于市场认为这四家公司的投资机会现值均为负，其市场 PE 都小于基础 $PE(1/Ke)$ 。如果分析师有证据认为公司的真实投资机会现值大于零的话，则可以认为公司的价值被市场低估了。

表 4.4 市场看法并不总是与分析师一数

证券简称	$Ke/\%$	$g/\%$ (2005E)	$1/Ke$	PE (2004EPS)	$1/Ke-1$ $/ROE$	$PVGO$
新兴铸管	11.10	11.04	9.01	6.65	3.47	−0.68
华菱管线	11.92	15.74	8.39	7.10	1.75	−0.74
首钢股份	12.13	−6.52	8.24	6.55	2.52	−0.67
酒钢宏兴	12.25	−4.61	8.16	4.26	3.64	−1.07

资料来源：国信证券经济研究所。

对周期性公司 PE的解读方法二

对周期性公司 PE 解读的第二种方法是，先计算出公司的可持续增长率，然后以此为基础上下浮动从而设置出三种增长率的情景。接下来以公司目前的 PE 比率为目标值倒推出各个情景的概率，从而判断市场对该公司未来增长的看法。

下面，我们将以能源行业为例来具体说明这种方法。我们选取了能源行业八家代表性公司来计算能源行业的估值参数。见表 4.5 。

表 4.5 能源行业财务和估值数据 (单位：元，每股数据除外)

证券简称	净利润 (2004)	股东权益合计 (2004)	总市值 (05-7-22)	利润总额 (2004)	所得税 (2004)	每股收益 (2004)	每股股利 (2004)
神火股份	3.43E+08	1.43E+09	3E+09	5.16E+08	1.72E+08	1.374	
山西焦化	1.97E+08	9.6E+08	1.45E+09	2.3E+08	3.26E+07	0.97	0.2
G金牛	3.81E+08	2E+09	4.36E+09	5.06E+08	1.25E+08	0.8971	0.5
煤气化	1.64E+08	1.26E+09	1.62E+09	2.26E+08	6.19E+07	0.414	0.01
西山煤电	6.32E+08	3.84E+09	7.43E+09	9.02E+08	2.69E+08	0.78	0.3
郑州煤电	1.58E+08	1.55E+09	2.8E+09	2.41E+08	8.27E+07	0.2	0.1
兰花科创	2.82E+08	1.29E+09	2.94E+09	4.37E+08	1.61E+08	0.7592	0.2
兖州煤业	2.71E+09	1.53E+10	3.04E+10	1.69E+09	5.88E+08	0.88	0.26

资料来源：国信证券经济研究所。

能源行业的整体法 PE 为 11.1，其计算方法如下：

$$PE_I = \frac{\sum_{i=1}^{n} MV_i}{\sum_{i=1}^{n} NI_i} \tag{4.1.24}$$

其中 PE_I 表示整体法市盈率，MV_i 表示第 i 个上市公司的总市值，NI_i 表示第 i 个上市公司的净利润.

注：其他整体法指标的计算方法与此类似，不再赘述，计算结果见表 4.6 .

表 4.6　能源行业估值参数

股利支付率 /%	ROE/%	资产 β	生息负债与总市值之比	所得税率 /%	杠杆 β
32.04	17.64	0.99	0.221	31.41	1.14

资料来源：国信证券经济研究所.

由于“神火股份”2004 年没有支付股利，在计算股利支付率时将该公司排除. 表中总市值为调整后的总市值，即：流通市值 + 非流通股份 × 每股净资产.

把资产 Beta 转换为杠杆 Beta 的公式为

$$\beta_L = \beta_U + (1 - T) \cdot \frac{D}{E} \cdot \beta_U \tag{4.1.25}$$

其中 β_L 表示杠杆贝塔，β_U 表示资产贝塔，T 表示公司所得税率，D 表示长期负债，E 表示股东权益。

在得到了这些估值参数以后，我们就可以计算能源行业的可持续增长率. 由于计算的是预期的长期增长率，因而不能采用历史的股利支付率和 ROE, 而应使用预期的长期股利支付率和 ROE 。这里，我们假设随着能源行业进一步趋于成熟，其未来的股利支付率平均水平为历史值的一倍，即 64%; ROE 则维持在 15% 。这样，其可持续增长率为

$$\begin{aligned} g &= ROE \times (1 - \text{股利支付率}) \\ &= 15\% \times (1 - 64\%) \\ &= 5.4\% \end{aligned}$$

在表 4.7 中，我们设前面计算的可持续增长率为正常情景，并在此基础上上浮 70% 和下浮 20% 作为乐观情景和悲观情景. 可以看到，三种情景下的 PE 分别为 11.56， 8.76 和 8.39，而市场当前的 PE 为 11.1 . 因此我们可以判断市场 PE 必然是正常情景和乐观情景的某种加权平均. 经过计算，我们得到当

乐观情景的概率为 84%, 正常情景为 16% 时，两者的加权平均 PE 刚好与市场 PE 相等。这就是说市场对能源行业的长期增长是偏于乐观的．如果分析师有证据认为 9.16% 的长期增长率过高，市场对乐观情景所赋予的概率过大，则能源行业存在着被高估的可能．

表 4.7 能源行业 PE的情景分析

增长率	情景一 (乐观)	情景二 (正常)	情景三 (悲观)
浮动系数	1.7	1	0.8
可持续增长率 /%	9.16	5.40	4.31
基础 $PE(1/Ke)$	7.51	7.51	7.51
企业竞争优势指标 (FF)	1.84	1.84	1.84
增长机会现值 $(PVGO)$	2.20	0.68	0.48
$FF \cdot PVGO$	4.05	1.25	0.88
估值结果 $(PE = 1/Ke + FF \cdot PVGO)$	11.56	8.76	8.39
情景概率 /%	83.72	16.28	
加权平均值	11.10		
当前市场 PE(整体法)	11.10		

资料来源：国信证券经济研究所。

§4.2 债券定价

§4.2.1 国债定价公式

一个拥有事先确定的未来固定收益的债券的价格是所有未来支付的现值 (Present Value) .

设一个 n 年到期的复息债券 (每年支付一次利息，最后一次为本金加利息), 见表 4.8 .

表 4.8 国债定价过程分解

时间	支付	折现因子	支付的现值
1	CF_1	δ_1	$CF_1 \cdot \delta_1$
2	CF_2	δ_2	$CF_2 \cdot \delta_2$
3	CF_3	δ_3	$CF_3 \cdot \delta_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	CF_n	δ_n	$CF_n \cdot \delta_n$

则债券的价格为

$$P = \sum_{i=1}^{n} CF_i \cdot \delta_i \tag{4.2.1}$$

换句话说，债券定价问题变成折现因子的估计问题. 其中折现因子 (Discount Factor) 有两种选择：一种是使用即期利率，即

$$\delta_t = \frac{1}{(1+s_t)^t} \tag{4.2.2}$$

另一种是使用 n 年到期收益率，即

$$\delta_t = \frac{1}{(1+y_n)^t} \tag{4.2.3}$$

一个最著名的均衡即期利率模型是 NS 模型：

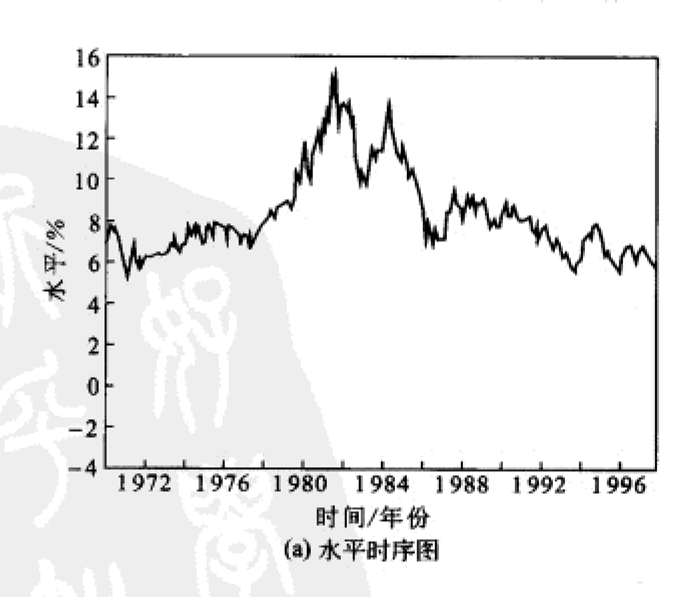
$$s_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda t} + \beta_3 \cdot \left(\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda t} - e^{-\lambda t}\right) \tag{4.2.4}$$

相应的远期利率为

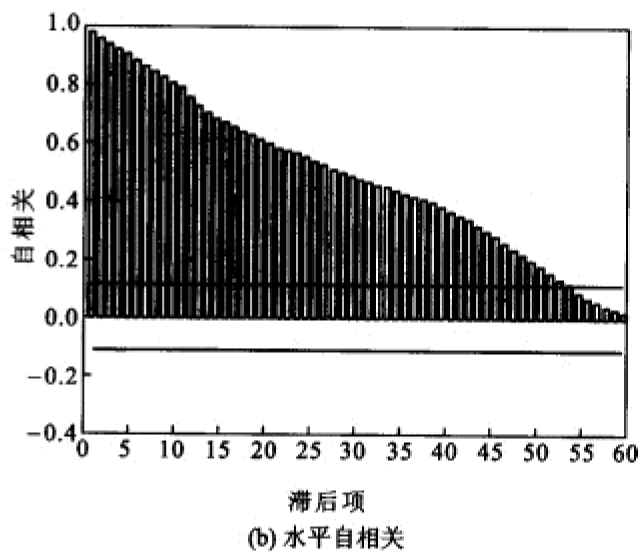
$$f_t = \beta_1 + \beta_2 e^{-\lambda t} + \beta_3 \lambda t e^{-\lambda t} \tag{4.2.5}$$

其中参数 β_1,β_2 和 β_3 有金融含义，β_1 为利率水平 (Level),β_2 为利率斜度 (Slope) 或称利差 (Spread),β_3 为利率曲度 (Curvature) 。

下面三个图 (图 4.5, 图 4.6, 图 4.7) 分别显示了在过去近四十年美国国债市场的利率水平、斜度和曲度，以及它们时间上的自相关系数.

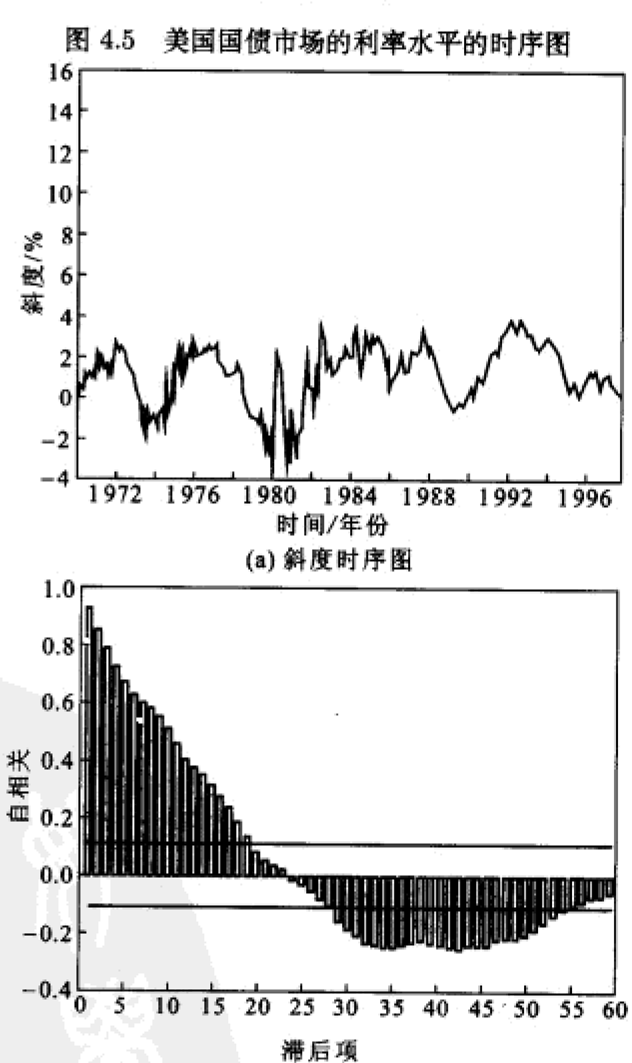


(a) 水平时序图



(b) 水平自相关

图 4.5 美国国债市场的利率水平的时序图



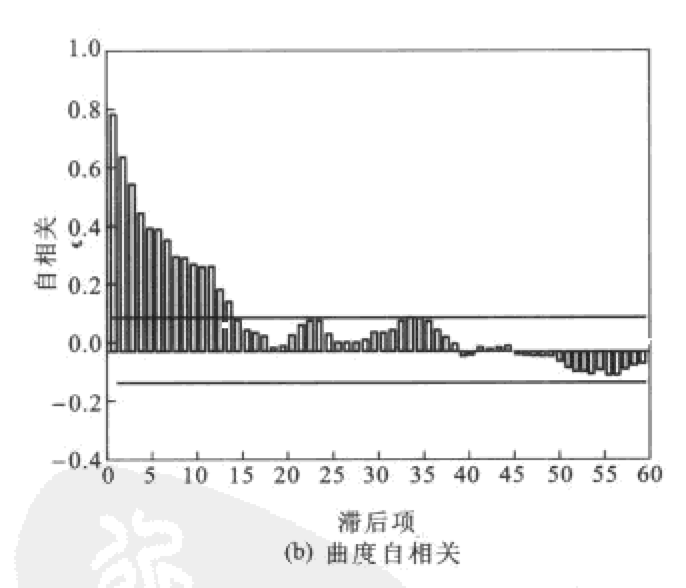
(b)斜度自相关

图 4.6 美国国债市场的利率斜度的时序图

曲度/%

时间/年份

(a) 曲度时序图



(b) 曲度自相关

图 4.7　美国国债市场的利率曲度的时序图

用 NS 模型计算即期利率时，事实上使用了三个时变但非随机的因子负载 (Factor Loading)

$$f_{1,t} = 1$$

$$f_{2,t} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda t}$$

$$f_{3,t} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda t} - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

换句话讲， NS 模型假定国债的三因子模型

$$s_t = \beta_1 f_{1,t} + \beta_2 f_{2,t} + \beta_3 f_{3,t} \tag{4.2.6}$$

而在 Ho-Lee 和 Vasicek 单因子利率模型中给出的是随机的因子负载：

$$\mathrm{d}s_t = \lambda_t \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}w_t \tag{4.2.7}$$

和

$$\mathrm{d}s_t = K(\theta - s_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}w_t \tag{4.2.8}$$

图 4.8 给出 NS 模型的三因子负载时间期限图，我们可以看到在短期利率市场 (小于 3 年)$f_{2,t}$ 贡献最多，但在中期市场 (3~7 年)$f_{2,t}$ 和 $f_{3,t}$ 变得同等重要，在长期市场 $f_{2,t}$ 和 $f_{3,t}$ 的重要性相对降低。

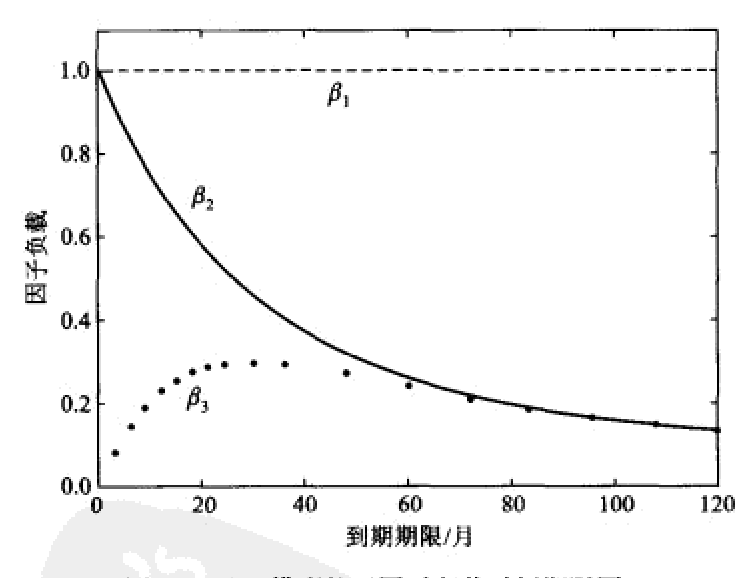


图 4.8 NS 模型的三因子负载时间期限图

图 4.9 显示在 1970 年 5 月 29 日，由于美国经济处于滞涨 (Stagflation) 即高通胀率 (High Inflation) 和经济下降的状态，市场短期利率高达 7.1%, 同时市场预期美联储会在未来下调利率。

图 4.10 显示 1974 年 4 月 30 日美国经济和国债市场两难之中的利率期限结果。由于高石油价格冲击，美国通胀更高，美联储只好将短期利率提到 9.2%, 但由于美国经济下滑，市场预期会有宽松的货币政策出台来刺激经济，因此出现利率倒挂的现象。

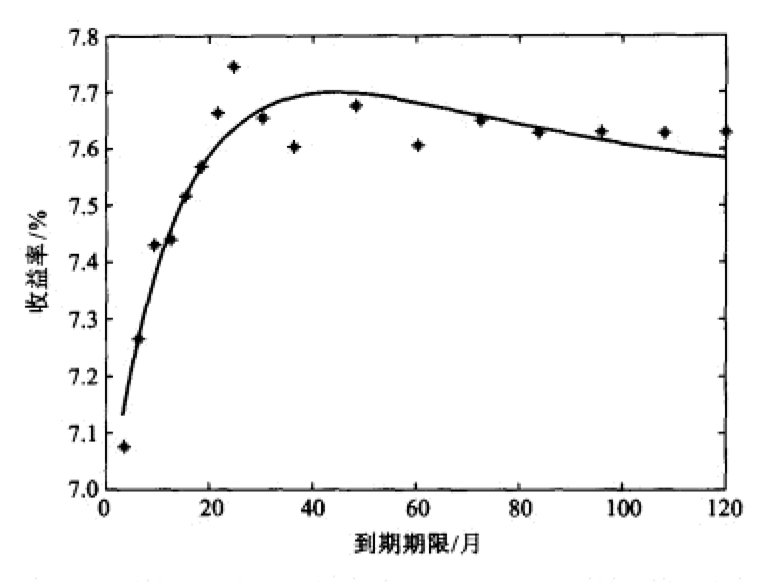


图 4.9　1970 年 5 月 29 日美国利率期限结构和 NS 模型估计

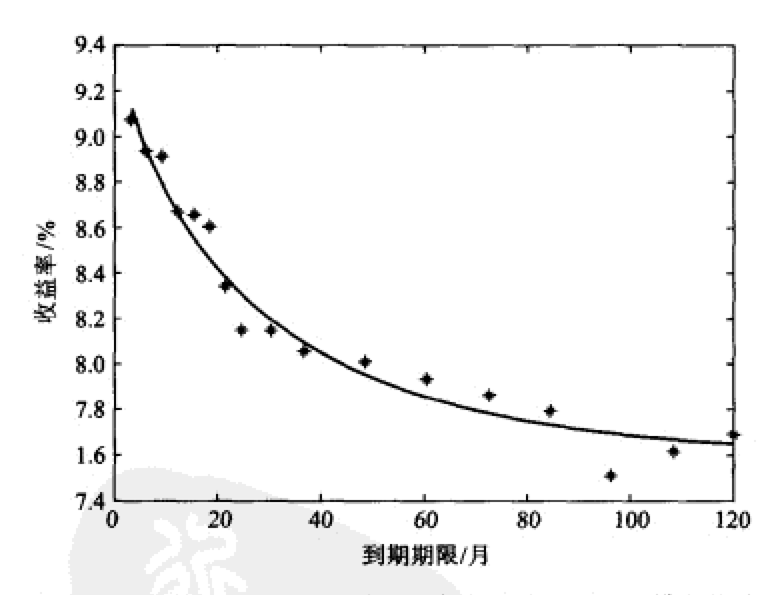


图 4.10　1974 年 4 月 30 日美国利率期限结构和 NS 模型估计

图 4.11 显示 1997 年 2 月 28 日由于美国和全球经济过热 (在亚洲金融危机之前), 市场预期美联储会收紧货币政策，一个典型的预期利率期限结构.

图 4.12 显示中国债券市场利率结构，在 2006 年 2 月市场担心高通货膨胀和央行加息，但从 9 月份开始，市场对国家宏观调控的效果已有信心，预计央行不会再加息，这从图中两条即期曲线可以看出.

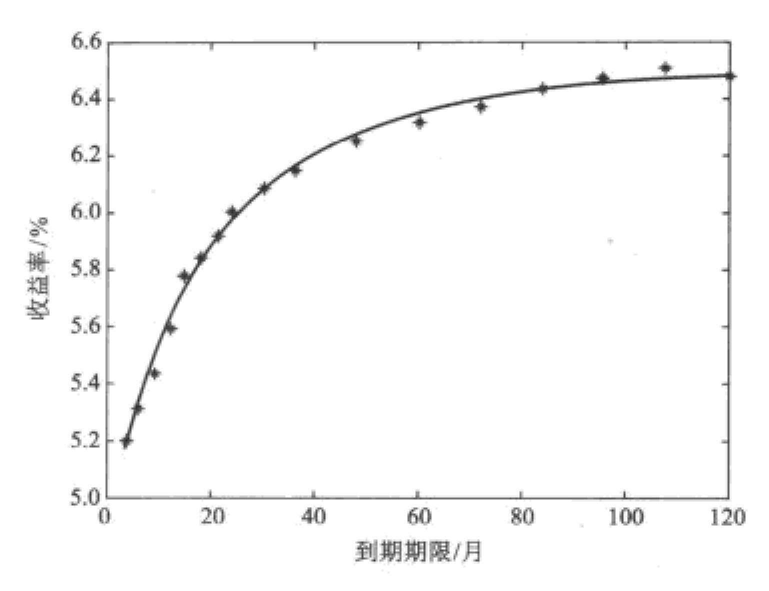


图 4.11 1997 年 2 月 28 日美国利率期限结构和 NS 模型估计

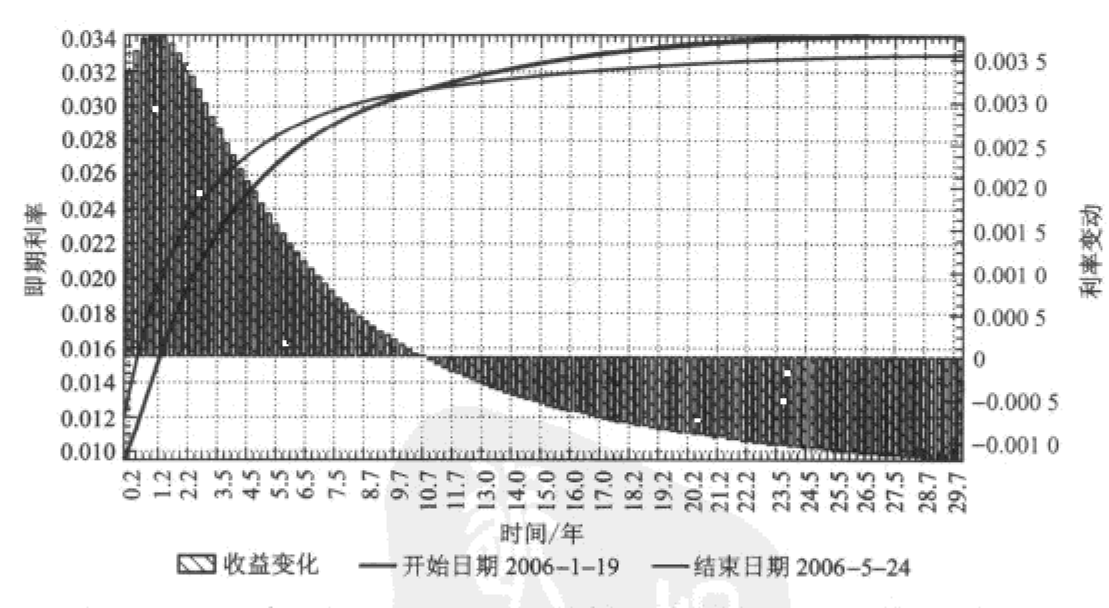


图 4.12 2006 年 1 月 19 日和 5 月 24 日中国利率期限结构和 NS 模型估计

§4.2.2 债券价格敏感性 —— 债券的久期

久期的定义

久期作为债券分析和管理的一个基本概念的两个主要原因是:

(1) 它是测量债券投资风险的一个有用的工具;

(2) 它是免疫 (Immunization) 问题的核心，即它是寻求保护未来不可预测的利率变化带来的损失的一个过程.

一个债券的久期被简单定义为该债券未来现金流入的时刻的加权平均，而每个权重与未来现金流的现值的大小成正比。从物理角度讲，它是在现值意义上现金流的重心. 这个久期的定义很容易被推广到组合级别上，即组合的久期是组合的个股的久期加权之和，其中权重为组合的权重.

Macauley 久期

基本假定：采用到期收益率 y 来进行折现.

第一步：设有一个债券，其每次现金流为 C_i, $i=1,2,\cdots,T$, 见图 4.13 .

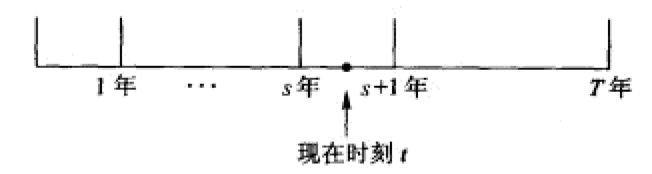


图 4.13 复息债时点图

计算到期收益率 $y_{t,T}$ 为

$$B_t=\sum_{i=s+1}^{T}\frac{C_i}{(1+y_{t,T})^{i-t}}$$

第二步：在 t 时刻的久期为

$$D_t=\frac{1}{B_t}\sum_{i=s+1}^{T}(i-t)\frac{C_i}{(1+y_{t,T})^{i-t}}$$

久期的应用：作为到期收益率变化对债券的敏感性.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}B_t}{\mathrm{d}y_{t,T}}&=\sum_{i=s+1}^{T}\left(-(i-t)\frac{C_i}{(1+y_{t,T})^{i-t+1}}\right)\\&=\frac{-1}{1+y_{t,T}}\sum_{i=s+1}^{T}(i-t)\frac{C_i}{(1+y_{t,T})^{i-t}}\\&=\frac{-B_t}{1+y_{t,T}}D_t\end{aligned}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}B_t}{B_t}=\frac{-D_t}{1+y_{t,T}}\mathrm{d}y_{t,T}$$

这里久期为计算收益率变化引起的债券价格变化率提供较好的逼近。例如，$D=6.995$ 年， $t=0,B_0=100$，到期收益率为 9%，假定到期收益率变化 1%，则

$$\frac{\Delta B}{B}\approx\frac{\mathrm{d}B}{B}=-\frac{D}{1+y_{0,T}}\mathrm{d}y_{0,T}=\frac{-6.995}{1.09}\times 1\%\approx -6.4\%$$

在实际计算中，由于收益率的变化导致的投资收益为

$$\frac{\Delta B}{B}=\frac{B(10\%)-B(9\%)}{B(9\%)}=\frac{93.855-100}{100}\approx -6.14\%$$

逼近误差为 0.26%。

修正久期

令

$$D_m=\frac{D}{1+y_{t,T}}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}B}{B}=-D_m\mathrm{d}y_{t,T}\text{或等价地}D_m=-\frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}y_{t,T}}$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\mathrm{d}B}{B}\right)=D_m^2\mathrm{Var}(\mathrm{d}y_{t,T})$$

$$\sigma\left(\frac{\mathrm{d}B}{B}\right)=D_m\sigma(\mathrm{d}y_{t,T})$$

久期与到期收益率的关系

定义以久期为中心，现金流时刻的方差为

$$\nabla_{t,T}^2=\sum_{i=s+1}^{T}(i-t-D)^2\cdot w_i$$

其中权重 w_i 为

$$w_i=\frac{C_i}{B_t(1+y_{t,T})}$$

则我们有

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}y_{t,T}}=\frac{\nabla_{t,T}}{1+y_{t,T}}$$

久期与到期期限的关系

见图 4.14。

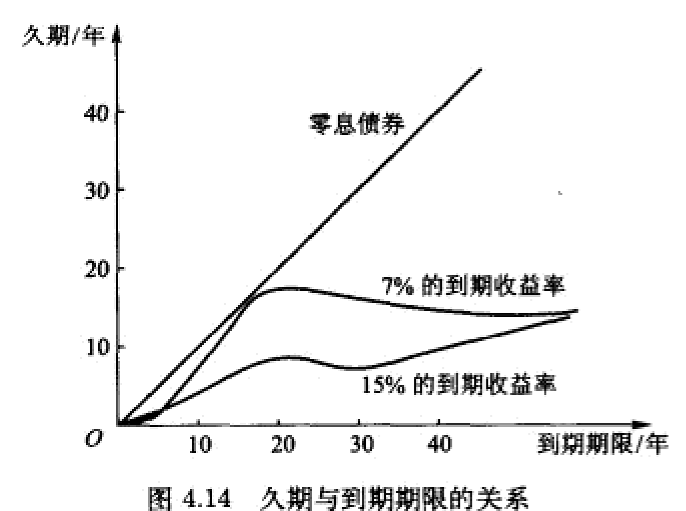


图 4.14　久期与到期期限的关系

§4.2.3　债券价格敏感性 —— 凸性 (Convexity)

凸性的定义

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}y_{t,T}^2} \\
&= \frac{1}{B(1+y_{t,T})^2} \sum_{i=s+1}^{T} (i-t)(i-t+1)C_i(1+y_{t,T})^{-(i-t)}
\end{aligned}
$$

债券收益的二阶 Taylor 逼近为

$$
\frac{\Delta B}{B} \approx \frac{1}{B}\left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}y_{t,T}}\mathrm{d}y_{t,T} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}y_{t,T}^2}(\mathrm{d}y_{t,T})^2\right)
$$

例如在上面的例子中:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}y_{t,T}^2}\mathrm{d}y_{t,T}^2 = \frac{1}{2}(56.5(T-t)^2)(1\%)^2/(T-t)^2 = 0.2825\% \\
&\frac{\Delta B}{B} \approx -6.4174\% + 0.2825\% = -6.1349\%
\end{aligned}
$$

债券组合的凸性

设

$$
P(y_{t,T}) = \sum_{j=1}^{n} N_j B_j(y_{t,T})
$$

则

$$C_p = \sum_{j=1}^{n} w_j C_j$$

其中

$$w_j = \frac{N_j B_j(y_{t,T})}{P(y_{t,T})},\ j = 1, 2, \cdots, n$$

§4.2.4 债券组合价格敏感性 —— 组合的久期

在一个债券组合之中，由于各债券的期限可能不同，因此无法使用到期收益率的概念，但可以采用折现因子的方法. 首先折现因子的定义为

$$\delta(t) = \frac{1}{(1+y_t)^t}$$

其中 y_t 为在 0 时刻确定的即期利率，则债券的全价 (Dirty Price) 为

$$P_t = \sum_j C_j \delta(t_j)$$

久期的定义为

$$D = \frac{\sum_j t_j C_j \delta(t_j)}{P_t}$$

可以证明这个定义与用到期收益率的定义是一致的.

现在组合为

$$MV_t = \sum_i N_{t,i} P_{t,i}$$

其中 $N_{t,i}$ 为在 t 时刻第 i 只债券的持仓量，$P_{t,i}$ 为在 t 时刻第 i 只债券的全价，则

$$P_{t,i} = \sum_j C_{i,j} \delta(t_{i,j})$$

这样组合的现金流时点为

$$\{t_{i,j}\},\ i = 1, 2, \cdots, N,\ j = 1, 2, \cdots, M$$

由久期的定义，该组合的久期为

$$D_p = \frac{\sum_i \left(N_{t,i} \sum_j t_{i,j} C_{i,j} \delta(t_{i,j}) \right)}{MV_t} = \frac{\sum_i \left(N_{t,i} P_{t,i} \left(\frac{\sum_j t_{i,j} C_{i,j} \delta(t_{i,j})}{P_{t,i}} \right) \right)}{MV_t} = \frac{\sum_i N_{t,i} P_{t,i} D_i}{MV_t} = \sum_i w_{t,i} D_i$$

其中头寸比例为

$$w_{t,i} = \frac{N_{t,i} P_{t,i}}{MV_t}$$

如果使用到期收益率的概念，则我们知道：

$$D_i = -\frac{\mathrm{d}P_{t,i}}{P_{t,i}}(1 + y_{t,T_i})/\mathrm{d}y_{t,T_i}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}MV_t}{MV_t} = \frac{\mathrm{d}y_{t,T}}{1 + y_{t,T}} \sum_i \left(w_{t,i}(1 + y_{t,T_i}) \frac{\mathrm{d}P_{t,i}}{P_{t,i}} \Big/ \mathrm{d}y_{t,T_i} \right)$$

其中 $y_{t,T}$ 为组合的到期收益率，即

$$MV_t = \sum_i \left(N_{t,i} \sum_j \frac{C_{i,j}}{(1 + y_{t,T})^{t_{i,j}}} \right)$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}MV_t}{MV_t} = \sum_i w'_{t,i} \cdot \frac{\mathrm{d}P_{t,i}}{P_{t,i}}$$

其中

$$w'_{t,i} = w_{t,i} \cdot \frac{1 + y_{t,T_i}}{1 + y_{t,T}} \cdot \frac{\mathrm{d}y_{t,T}}{\mathrm{d}y_{t,T_i}}$$

我们称 $w'_{t,i}$ 为到期收益率调整下的头寸比例.

作为加权平均值的久期

通常将组合久期作为各组成证券久期的加权平均值计算，权重代表了组合投资中每一证券的比重，这称为组合加权平均久期 (Portfolio Weighted Average

Duration)．或者，可以将组合设想为一张证券，有许多在期限最长的债券的到期日才收到的现金流．这一张证券有一个到期收益率，用它可以计算久期，称为组合的单一证券久期 (Portfolio Single Security Duration)．两种方法通常产生不同的结果，了解其含义也是很有用的．

计算 $PWAD$ 时对组合中的每一证券用市场价值作权重 (w_i)，如下式：

$$PWAD = \sum_{i=1}^{N} D_i w_i$$

其中 D_i 是证券 i 的修正久期，权重满足

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

$PSSD$ 可用下式计算：

$$PSSD = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{NM} \frac{C_{t_k} \cdot t_k}{(1+R)^{t+1}}$$

只有当收益率曲线是直线时 $PWAD$ 才等同于 $PSSD$，也就是说只有当收益率曲线是直线时组合的到期收益率才和加权平均到期收益率相等．计算组合久期时，你也许对利率发生特定变动时新的组合价值感兴趣．在一般情况下，当收益率曲线向上倾斜时，$PWAD$ 小于 $PSSD$．当收益率曲线是负利率时，$PWAD$ 大于 $PSSD$．像前面所表示的，修正久期总是低估了实际价格变动，因为有凸度的影响．随着期限的加长，两种方法的结果都降低了，两者的差距也降低了．

图 4.15 给出了给定价格 — 收益率曲线的 $PWAD$ 和 $PSSD$，是基于收益率为 9.5% 这一点计算的．这张图是为期限从 1 年到 40 年的梯级组合作的，每一组的面值为 1000 元．注意，$PSSD$ 方法在利率下降的情况下和真实的价格收益关系接近．两条久期曲线的斜率显然不同．这意味着两者之一或两者事实上都不和价格收益曲线相切．相反，久期线可能与曲线交叉两次，而不是一次．有趣的是，对于利率的小范围变动 (相交的两点之间的区域)，组合久期方法预计了一个比实际值高的组合价值，因此考虑凸度将降低估计的质量．

当然，组合经理希望预测的误差最小化．$PWAD$ 要优于 $PSSD$ 吗？它计算起来比较简单．表 4.9 显示了在不同收益率曲线假设和不同利率变动下两种方法的相对比较．

$PWAD$ 方法有计算上的优势，重要的问题是两种方法之间的差别是否很大。对于最终期限长达四十年的梯级组合而言，$PWAD$ 在利率变化达 1% 时，对新价格的预计误差从未超过 50 个基本点。对于同样的组合，$PSSD$ 方法有可能包含更大的预测误差，可达 4.5%。总之，虽然在某些情况下 $PSSD$ 能作更好的预测，但 $PWAD$ 的变化要小一些，是最好的方法，除非你确信收益率曲线将发生某种变化。

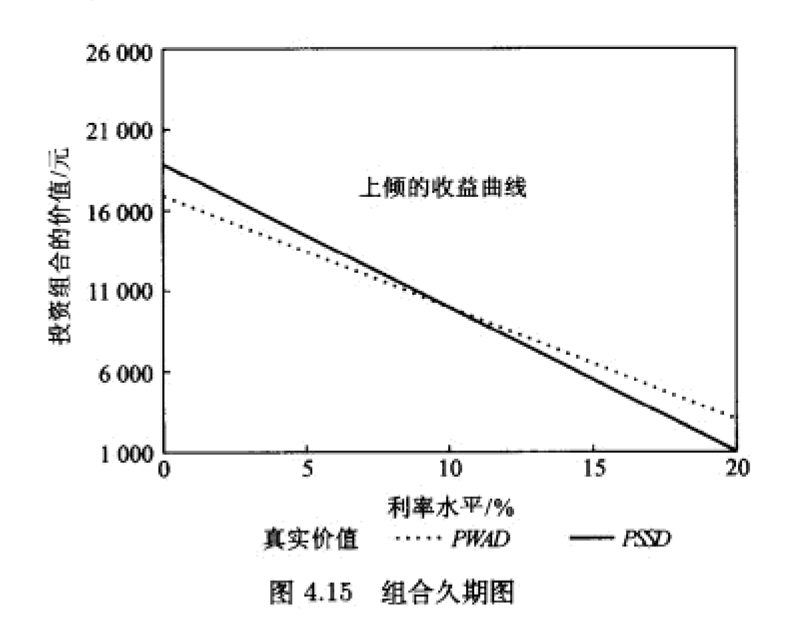


图 4.15　组合久期图

表 4.9　$PWAD$与 $PSSD$的比较

	利率上升	利率下降
向上倾斜的收益率曲线	$PWAD$ 好	$PSSD$ 好
负利率收益率曲线	$PSSD$ 好	$PWAD$ 好

§4.3　期权定价

一个在 t 时刻交易的欧式看涨 (Call) 期权合约，给该合约的购买者一个在 $t+T$ 时刻从该合约的出售者中以价格 K 购买该期权的标的物 (Underlying Asset) 的权力，注意这个选择权 不同于远期合约和期货中的交易义务。 价格 K 称为执行价格或履约价格 (Strike Price)，一个美式 期权给了合约购买者在 $t+1$ 到 $t+T$ 之间执行该选择权的选项。事实上，如果存在一个期权市场，则美式合约与欧式合约是等价的。因为欧式合约的购买者虽然不能找出售者执行该选择

权，但他可以通过出售该合约给市场中的第三者"等价地"实现该选择权，并且市场的无套利机会将使得欧式期权出售给第三方和执行美式期权的收益回报是等价的。

一个看跌 (Put) 期权给了合约购买者卖出标的资产的选择权。

一个期权在执行选择权 (与出售者或第三方投资者) 时，该期权的执行价格 K 等于相关标的物的市场价值 S, 称该期权处于"平值"或"到价"(At-the-money) 状态，简记为 ATM, 如果该期权在执行时，处于亏损状态，则称为"虚值"或"未到价"(Out-the-money), 简记为 OTM, 如果该期权在执行时，处于赢利状态，则称为"实值"或"已到价" (In-the-money), 简记为 ITM .

§4.3.1 期权价格 —— 内在价值和时间价值

期权的期权价格由两部分组成：

$$\text{期权价格} = \text{内在价值} + \text{时间价值}$$

期权的内在价值 (IV,Intrinsic Value), 是指相关工具价格与履约价格的差额，这个值必须为正或为零。内在价值是衡量期权的实值状态的尺度。

$$\text{内在价值} = \text{相关工具价格与履约价格的差额}$$

例如，某欧洲美元 6 月份期货价格为 94.96,6 月份期货买入期权执行价格为 94.75, 6 月份期货买入期权的期权价格为 0.28, 因此，如果某一买入期权的买者立即行使他买入相关期货合约的权利，并在市场上立即出售，就可获取 $94.96-94.75=0.21$ 点的收益。所以，对于一个买入期权：

$$\text{内在价值} = \text{相关工具价格} - \text{履约价格}$$

这份买入期权的内在价值为 0.21, 但是期权价格的报价为 0.28, 期权价格在其内在价值之外附加的这部分额外价值由何而来呢？

这个附加部分就是时间价值 (TV, Time Value), 这个量用于补偿立权者在期权到期前，期权可能进入实值状态而需承担的风险，对于一个买入期权：

$$\text{时间价值} = \text{期权价格} - \text{内在价值}$$

此处买入期权的时间价值为 0.07 .

随着距到期日时间的减少，时间价值也不断降低，直至到期日时达到零。换句话说，随着距到期日的减少，期权发展内在价值的时间也越来越少。图 4.16 展示了时间价值与距到期日时间之间的关系：

因此，处于实值状态期权的期权价格，等于内在价值与时间价值之和．处于虚值状态期权的期权价格，由于内在价值为零而全部反映为时间价值．

为了更好地理解内在价值和时间价值，请看图 4.17．

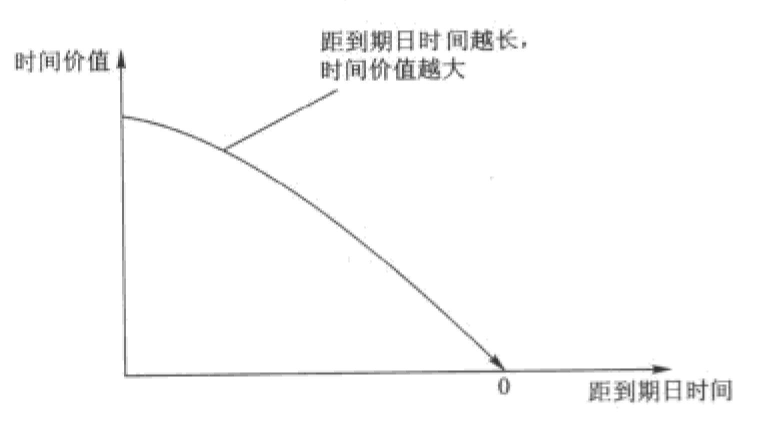


图 4.16　时间价值与距到期日时间之间的关系

图 4.17　内在价值和时间价值

期权的履约价格与相关工具的市场价格越接近，期权的时间价值越高.

请注意，对于卖出期权，你必须把目前为止使用过的某些定义和描述反过来看．例如，对于卖出期权：

$$\text{内在价值} = \text{履约价格} - \text{相关工具价格}$$

现在你应该已经弄清了期权的平值状态、实值状态、虚值状态这些术语，以及期权价格的组成——内在价值和时间价值．但是，期权价格到底是怎么计算的呢？

§4.3.2 期权的布莱克——斯科尔斯 (Black-Scholes) 定价模型

一个欧式期权在到期执行时的收益为

$$X_T = \begin{cases} S_T - K, & \text{如果} S_T \geqslant K \\ 0, & \text{如果} S_T < K \end{cases} \tag{4.3.1}$$

则由风险中性定价原理，该期权的价格 C_0 满足

$$\frac{C_0}{A_0} = E^{\pi}\left(\frac{X_T}{A_T}\right) \tag{4.3.2}$$

$$= E^{\pi}\left(\frac{X_T 1_{\{S_T \geqslant K\}}}{A_T} + \frac{E^{\pi} X_T 1_{\{S_T < K\}}}{A_T}\right) \tag{4.3.3}$$

$$= E^{\pi}\left(\frac{(S_T - K) 1_{\{S_T \geqslant K\}}}{A_T}\right) \tag{4.3.4}$$

其中 $A_0, \cdots, A_T$ 为一计价过程 (numéraire), 一般采用无风险利率或零息债券来表示，即 $A_t = \mathrm{e}^{R_f t}$ ．也可以将 $R_f T$ 换一个记号，记在 t 日 T 时刻到期的零息债券的价值为 $B(t, T)$, 即

$$B(t, T) = \mathrm{e}^{-R_f (T-t)} \tag{4.3.5}$$

则我们知道

$$A_T = \mathrm{e}^{R_f T} = \frac{1}{B(0, T)} \tag{4.3.6}$$

和

$$R_f T = -\ln B(0, T) \tag{4.3.7}$$

如果假定标的物过程 (如股价) 服从几何布朗运动，见图 4.18, 即

$$\mathrm{d}(\ln S_t) = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \tag{4.3.8}$$

其中 $\mathrm{d}W_t$ 为零均值和方差为 $\mathrm{d}t$ 的正态随机变量。在风险中性分布 π 之下，可以将上式变换为

$$\mathrm{d}(\ln S_t) = \widetilde{\mu}\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}\widetilde{W}_t \tag{4.3.9}$$

其中 $\mathrm{d}\widetilde{W}_t$ 同样为零均值和方差为 $\mathrm{d}t$ 的正态随机变量并且 $\tilde{\mu} = R_f - \frac{1}{2}\sigma^2$, 这样我们得到

$$S_t = S_0 \exp\left(\widetilde{\mu}t + \sigma\widetilde{W}_t\right) \tag{4.3.10}$$

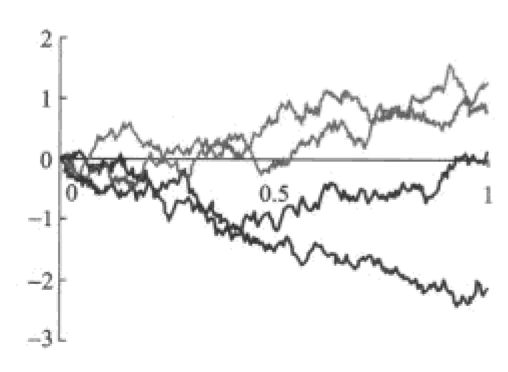


图 4.18　基于布朗运动的股价运动模拟

注记 2　$\mathrm{d}(\ln S_t)$ 和 $\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}$ 的关系问题：如果 $\mathrm{d}(\ln S_t)$ 服从随机微分方程

$$\mathrm{d}(\ln S_t) = \tilde{\mu}\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}\widetilde{W}_t$$

则由 Itô 引理，我们可以得到

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \left(\tilde{\mu} + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}\widetilde{W}_t = R_f\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}\widetilde{W}_t$$

这样期权的价格为

$$C_0 = A_0\, E^{\pi}\left(\frac{(S_T - K)1_{\{S_T \geqslant K\}}}{A_T}\right) \tag{4.3.11}$$

$$= \frac{A_0}{A_T} E^{\pi}\left(S_T 1_{\{S_T \geqslant K\}}\right) - \frac{A_0}{A_T} K \cdot E^{\pi}\left(1_{\{S_T \geqslant K\}}\right) \tag{4.3.12}$$

由 (4.3.10) 式，我们得到

$$S_0 \exp(\widetilde{\mu}T + \sigma\widetilde{W}_T) \geqslant K$$

即

$$\widetilde{W}_T \geqslant \frac{1}{\sigma}\left(\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \widetilde{\mu}T\right) \triangleq \lambda \tag{4.3.13}$$

这样，我们有

$$C_0 = \frac{A_0}{A_T} E^{\pi}\left(S_0 \exp(\widetilde{\mu}T + \sigma \widetilde{W}_T) 1_{\{\widetilde{W}_T \geqslant \lambda\}}\right) - \frac{A_0}{A_T} K \cdot E^{\pi}\left(1_{\{\widetilde{W}_T \geqslant \lambda\}}\right) \tag{4.3.14}$$

由于 $\widetilde{W}_T$ 为零均值和方差为 T 的正态随机变量，这样我们有

$$\begin{aligned} E^{\pi}\left(1_{\{\widetilde{W}_T \geqslant \lambda\}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{\lambda}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2T}} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\lambda}{\sqrt{T}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y \ = \ 1 - \int_{-\infty}^{\frac{\lambda}{\sqrt{T}}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y \\ &= 1 - N\left(\frac{\lambda}{\sqrt{T}}\right) \ = \ N\left(\frac{-\lambda}{\sqrt{T}}\right) \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

其中 $N(\cdot)$ 为均值为零，方差为 1 的标准正态随机变量的分布函数。另一方面

$$E^{\pi}\left(\exp(\widetilde{\mu}T + \sigma \widetilde{W}_T) 1_{\{\widetilde{W}_T \geqslant \lambda\}}\right) \tag{4.3.16}$$

$$\begin{aligned} &= \exp(\widetilde{\mu}T) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{\lambda}^{+\infty} \mathrm{e}^{\sigma x} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2T}} \mathrm{d}x \\ &= \exp(\widetilde{\mu}T) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\lambda}{\sqrt{T}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}y} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2} \mathrm{d}y \\ &= \exp(\widetilde{\mu}T) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2 T} \int_{\frac{\lambda}{\sqrt{T}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(y-\sigma\sqrt{T})^2} \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

由于 $\widetilde{\mu} = R_f - \frac{1}{2}\sigma^2$, 我们有

$$\begin{aligned} & E^{\pi}\left(\exp(\widetilde{\mu}T + \sigma \widetilde{W}_T) 1_{\{\widetilde{W}_T \geqslant \lambda\}}\right) \\ &= \mathrm{e}^{R_f T} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\lambda}{\sqrt{T}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(y-\sigma\sqrt{T})^2} \mathrm{d}y \\ &= \mathrm{e}^{R_f T} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\lambda}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2} \mathrm{d}y \\ &= \mathrm{e}^{R_f T} \left(1 - N\left(\frac{\lambda}{\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}\right)\right) \\ &= \mathrm{e}^{R_f T} N\left(-\frac{\lambda}{\sqrt{T}} + \sigma\sqrt{T}\right) \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

记 $d_1 = -\frac{\lambda}{\sqrt{T}} + \sigma\sqrt{T}$, 由 (4.3.13) 式，我们有

$$d_1 = -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{K}{S_0} - R_f T + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) + \sigma\sqrt{T} \tag{4.3.19}$$

使用 (4.3.7) 式能将 d_1 重新表示为

$$
\begin{aligned}
d_1 &= -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{K}{S_0} + \ln B(0,T) + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) + \sigma\sqrt{T} \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\frac{S_0}{K\cdot B(0,T)} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \\
&= \frac{\ln\frac{S_0}{K\cdot B(0,T)} + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}
\end{aligned} \tag{4.3.20}
$$

这样 (4.3.14) 式的第一项

$$
\begin{aligned}
&\frac{A_0}{A_T}E^{\pi}\left(S_0\exp(\widetilde{\mu}T + \sigma\widetilde{W}_T)1_{\{\widetilde{W}_T\geqslant\lambda\}}\right) \\
=&\frac{A_0}{A_T}\cdot e^{R_f T}S_0 N(d_1) = S_0 N(d_1)
\end{aligned} \tag{4.3.21}
$$

注意 $A_0 = 1, A_T = e^{R_f T}$ 。其次 (4.3.14) 式的第二项为

$$
\begin{aligned}
-\frac{A_0}{A_T}K \cdot E^{\pi}\left(1_{\{\widetilde{W}_T\geqslant\lambda\}}\right) &= -B(0,T)\cdot K\cdot N\left(-\frac{\lambda}{\sqrt{T}}\right) \\
&= -B(0,T)\cdot K\cdot N(d_2)
\end{aligned} \tag{4.3.22}
$$

其中 $d_2 = -\frac{\lambda}{\sqrt{T}}$ 。类似于 (4.3.20) 式的推导，我们得到

$$
\begin{aligned}
d_2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{S_0}{K\cdot B(0,T)} - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) \\
&= d_1 - \sigma\sqrt{T}
\end{aligned} \tag{4.3.23}
$$

综合上述两式的推导，我们得到著名的布莱克 — 斯科尔斯期权定价公式：

命题

$$
C_0 = S_0 N(d_1) - K\cdot B(0,T)N(d_2) \tag{4.3.24}
$$

当标的物的价格 S_0(如股价) 涨得很高的时候，不论执行价 K 如何，几乎都可以肯定该看涨期权将会被执行，事实上，数学上可以这样来描述：

$$
\lim_{S_0\to+\infty} d_1 = +\infty \text{ 和 } \lim_{S_0\to+\infty} d_2 = +\infty \tag{4.3.25}
$$

因此

$$
\lim_{S_0\to+\infty} N(d_1) = 1 \text{ 和 } \lim_{S_0\to+\infty} N(d_2) = 1 \tag{4.3.26}
$$

因此看涨期权的价格接近于

$$
\lim_{S_0\to+\infty} C_0 = S_0 - Ke^{-R_f T} \tag{4.3.27}
$$

这个价格恰好是执行价格为 K 的远期合约的价值！

另外一种情形是标的物的波动物的波动性 σ 接近于零．由于

$$\lim_{\sigma\to 0} d_1 = \lim_{\sigma\to 0} d_2 = +\infty \tag{4.3.28}$$

所以

$$\lim_{\sigma\to 0} N(d_1) = \lim_{\sigma\to 0} N(d_2) = 1 \tag{4.3.29}$$

由于期权的价格不能为负，且此时标的物接近于一个无风险资产，因此我们有

$$C_0 = \max\{S_0 - K\mathrm{e}^{-R_f T}, 0\} \tag{4.3.30}$$

期权的各项敏感性指标

定义：

$$Delta = \frac{\partial C_0}{\partial S_0} = \frac{\text{期权的价格变化}}{\text{标的物的价格变化}} \tag{4.3.31}$$

$$Gamma = \frac{\partial Delta}{\partial S_0} = \frac{\partial^2 C_0}{\partial S_0^2} \tag{4.3.32}$$

$$= \frac{\text{期权的}Delta\text{值变化}}{\text{标的物的价格变化}} \tag{4.3.33}$$

近似地，我们有

$$\mathrm{d}C_0 \approx Delta \cdot \mathrm{d}S_0 + \frac{1}{2} Gamma \cdot (\mathrm{d}S_0)^2 \tag{4.3.34}$$

$Delta$ 和 $Gamma$ 在对冲期权价值中扮演重要的角色．定义：

$$Theta = \frac{\partial C_0}{\partial t} = \frac{\text{期权的价格变化}}{\text{到交割日的时间减少}} \tag{4.3.35}$$

例如，我们看好一只股票，预期将从 10 元涨到 15 元，这自然会让我们采取一个看涨期权的多头头寸，但我们面临选择在哪一个执行价的期权问题，这里的关键是 $Theta$ 的大小，投资者预期在一个月内涨到 15 元和一年之内才会涨到 15 元将会有不同的 $Theta$ 值．定义：

$$Vega = \frac{\partial C_0}{\partial \sigma} = \frac{\text{期权的价格变化}}{\text{标的物的波动性变化}} \tag{4.3.36}$$

我们预期 $Vega > 0$, 即当波动性增加时，不论看涨还是看跌期权的价值都增加，这反映了我们是通过保险精算原理来导出布莱克 — 斯科尔斯定价模型的，说明期权是保险的一种形式，当波动性增加时，自然 "保费"(Premium) 要增加．

注记 3 高明的交易员即便是选股不佳依然有许多获利手段。他们的秘诀包括一种期权策略：针对的是卖空投资者所看好的股票。卖空投资者因认定股价将继续下跌而卖出借入股票，之后偿还借款并从价差中获利。

以 Overstock.com 有限公司 (Overstock.com Inc.) 为例，这是一家折价销售品牌商品的在线零售商，因为很多卖空投资者看好该公司的股票，市场上已经很难借入 Overstock 股票来支持卖空交易 (其他难以借入的股票还包括电击枪制造商泰瑟国际公司 (Taser International) 和在线电影租赁公司 (Netflix Inc.))，见图 4.19。

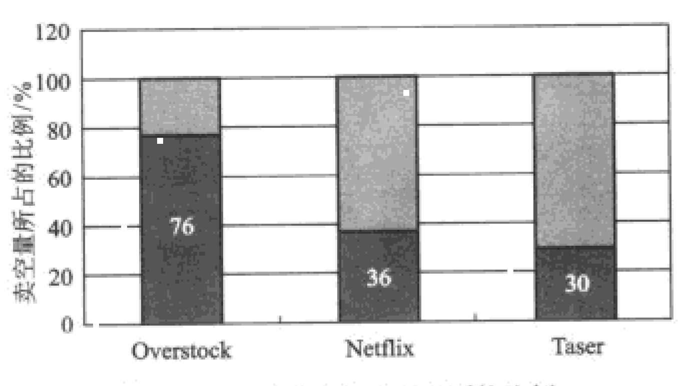


图 4.19 已被卖空的流通股票的比例

华尔街的银行和其他“主要经纪商”对借出股票进行卖空交易收取很高的费用。最近，经纪公司对借入股票的投资者收取 Overstock 市场价 20% 左右的年费。

受到重创的 Overstock 投资者 (这家公司的股票自 2005 年以来下跌了 60% 以上) 应采取的第一个步骤是将股票借给卖空者，并收取高额费用。

然后，如果这位投资者认为 Overstock 的股价已经稳定，他可以卖出看涨期权和看跌期权 (使他获得在未来以某一价格买进或卖出股票的权利)。卖出同一股票的看涨和看跌期权被称作出售波动性 (Selling Volatility)，实际上是投资者认定股价将会窄幅波动。难以借入的股票其期权一般价格较高，出售波动性的投资者在这两种期权交易中都能得到预付现金。

如果该股不再开始新一轮下跌，或突然反弹，投资者就能从借出该股和卖出期权中获利。

高盛集团 (Goldman Sachs Group) 的期权分析师玛丽亚 · 格兰特 (Maria Grant) 和约翰 · 马绍尔 (John Marshall) 在上周的研究报告中写道， “如果股

价窄幅波动，我们建议投资者趁期权价格较高时获利出局。”

一位对冲基金经理最近对他持有的 Overstock 股票执行了这种三方策略。除了向卖空者借出该股获得的收益外 (每股每月约为 42 美分)，他还以每期权单位 1.60 美元的价格卖出了在 25 美元价位 (距 Overstock 目前的市场价相差不远) 执行的一个月期看涨期权。同时，他也以每期权单位 1.60 美元的价格卖出了在 25 美元价位触发的一个月期看跌期权。在同一执行价位 (K=25 美元) 卖出看涨和看跌期权被交易员称为同价跨式买卖，见图 4.20。执行你已持有股票的同价跨式 (既一个股票多头头寸加上一个同价跨式头寸的组合，其中同价跨式买卖的标的物为该股票) 就是抵补同价跨式 (Covered Straddle)。

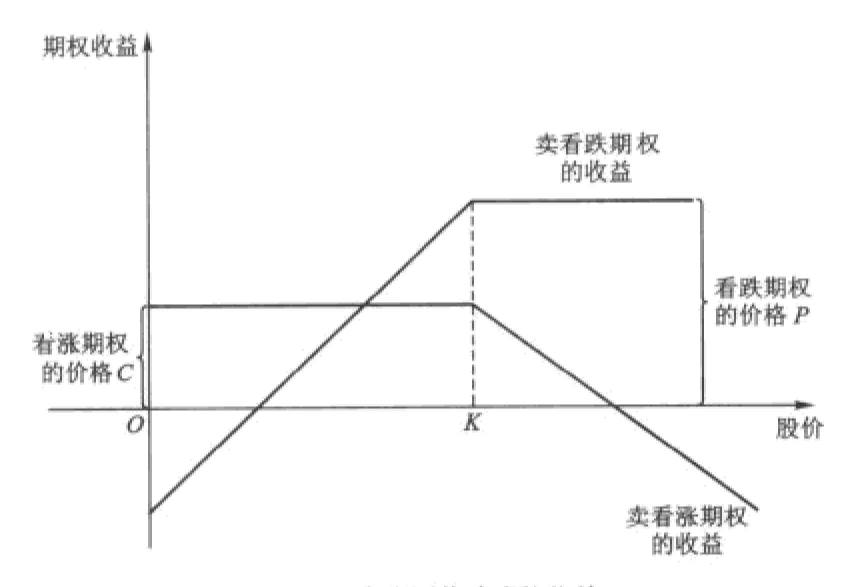


图 4.20 卖出同价跨式的收益

因此期权同价跨式加上借出股票使这位对冲基金经理能够每月获得每股 3.82 美元的收入。如果该股能在 21.18 至 28.82 美元 (25 美元加减 3.82 美元) 之间波动，抵补同价跨式就能够盈利。该股大幅下跌则会带来双重打击，因为这位投资者实际持有的股票也会继续亏损，见图 4.21。

有一种类似的策略叫做卖出抵补异价跨式 (Selling a Covered Strangle)，即在不同执行价位卖出看涨和看跌期权，这可能会减少投资者获得的预付费，但它能够扩大股票波动和获利的区间，见图 4.22。

这些策略不适用于胆小者。期权交易员有时甚至给同价跨式和抵补同价跨式冠以 “Texas” 的名头，以表达可能获得收益背后的巨大风险。即使是对冲

基金经理和其他经常使用这些期权的高明的投资者也常常要依靠非常昂贵的软件来了解交易的方式和时机。

纽约地区一家基金的期权交易员说，出售波动性看起来非常诱人，但也可能会因此损失累累。尝试这种做法前应该三思。

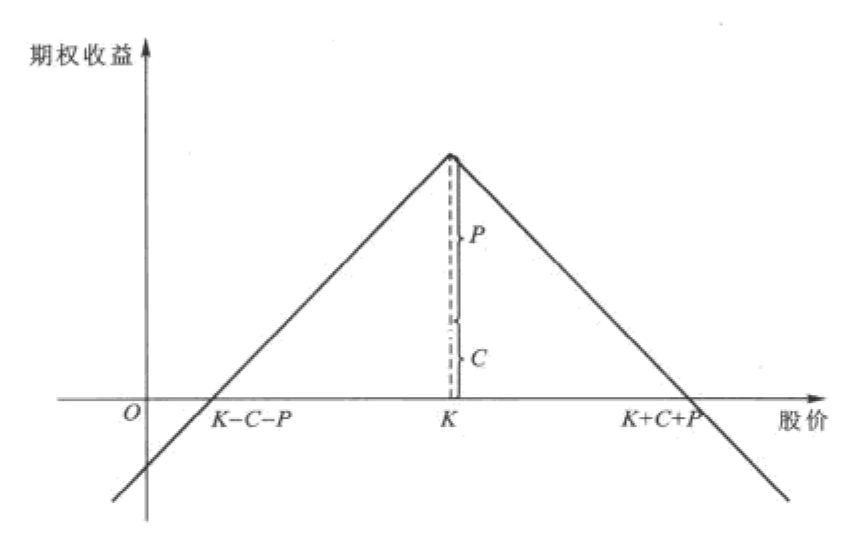


图 4.21　同价跨式的期权策略图

注：只要在期权到期前，股价在 $K-C-P$ 和 $K+C+P$ 之间波动，同价跨式操作策略都会盈利，但如果股价在到期前低于 $K-C-P$ 或高于 $K+C+P$，该策略都会损失钱。例如，如果 $K=25$美元，$C=1.6$美元，$P=1.6$美元，则股价在 21.8 美元到 28.2 美元之间波动时，同价跨式操作策略都会赚钱，不论股价的方向如何。

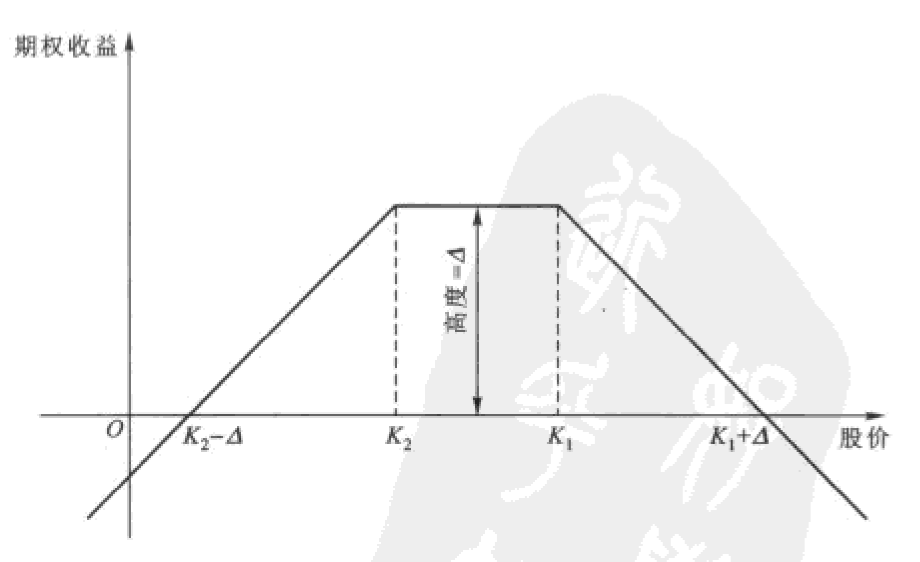


图 4.22　卖出异价跨式的收益

注：　$\Delta=P(K_1)+P(K_2)$，K_1 为看涨期权的执行价格，　K_2 为看跌期权的执行价格。

定义：

$$Rho = \frac{\partial C_0}{\partial R_f} = \frac{\text{期权的价格变化}}{\text{利率的变化}} \tag{4.3.37}$$

由布莱克 — 斯科尔斯方程，我们可以导出表 4.10 其中 $f(\cdot)$ 为标准正态密度函数，即

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{4.3.38}$$

从 *Delta* 的定义我们可以得出一个有趣的结论，即 *Delta* 值为期权交割处于实值 (即 ITM) 的概率. 在布莱克 — 斯科尔斯定价模型中，如果我们给定市场的期权价格 P, 标的物价格和利率水平，我们可以反解出 $\hat{\sigma}$, 即

$$BS(\hat{\sigma}) = P \tag{4.3.39}$$

表 4.10 期权的各项希腊字母 (Greeks) 指标

敏感性指标	看涨期权	看跌期权
Delta	$N(d_1)$	$-N(-d_1)$
Gamma	$\frac{1}{S\partial\sqrt{T}} f(d_1)$	$\frac{1}{S\partial\sqrt{T}} f(d_1)$
Theta	$-\frac{S\partial f(d_1)}{2\sqrt{T}} - R_f K \cdot B(0,T)N(d_2) < 0$	$-\frac{S\partial f(-d_1)}{2\sqrt{T}} + R_f K \cdot B(0,T)N(-d_2)$
Vega	$S\sqrt{T}f(d_1) > 0$	$S\sqrt{T}f(-d_1) > 0$
Rho	$TK \cdot B(0,T)N(d_2) \geqslant 0$	$-TK \cdot B(0,T)N(-d_2) \leqslant 0$

称为隐含波动率 (Implied Volatility)，隐含波动率 $IV = \hat{\sigma}$ 在实际期权中非常有用，见图 4.23 。因为在模型中假定波动性为一个常数，但从数据中重构的隐含波动率却因执行价格的高低而不同，一种解释是流动性溢价，因为期权处于虚值或实值时交易量较小，因此当进入合约时投资者要求一个流动性风险补偿，导致隐含波动性升高. 但无论如何这是一个世界难题，到目前为止尚未解决 (局部波动性模型提供了部分答案)，并且有著名的难题波动性微笑 (Volatility Smile)，见图 4.24 .

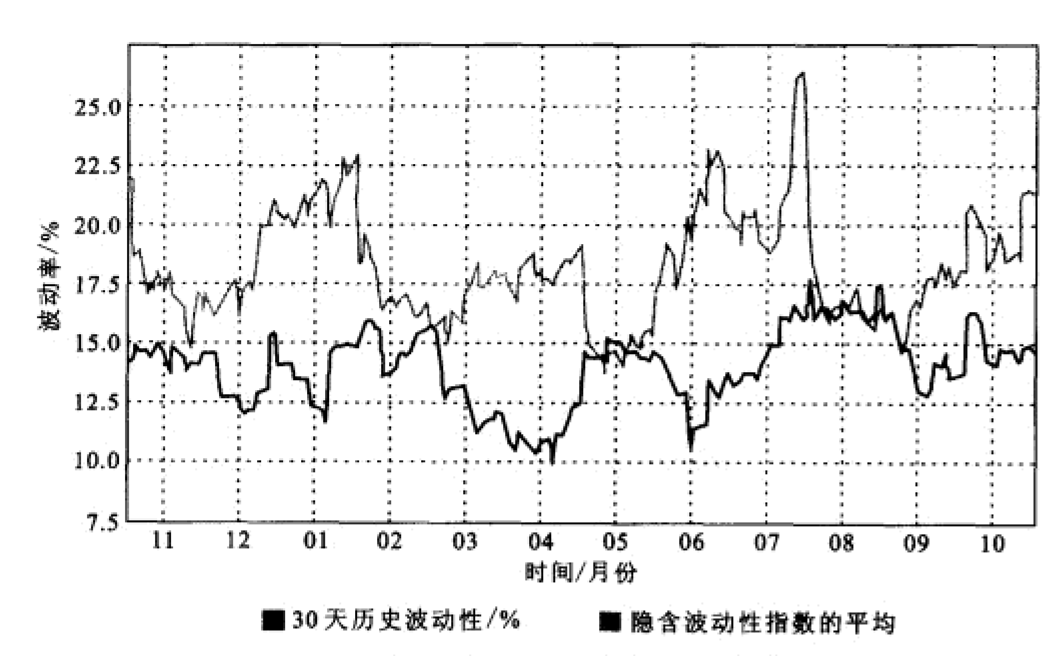


图 4.23　IBM 公司股票的历史波动率和隐含波动率

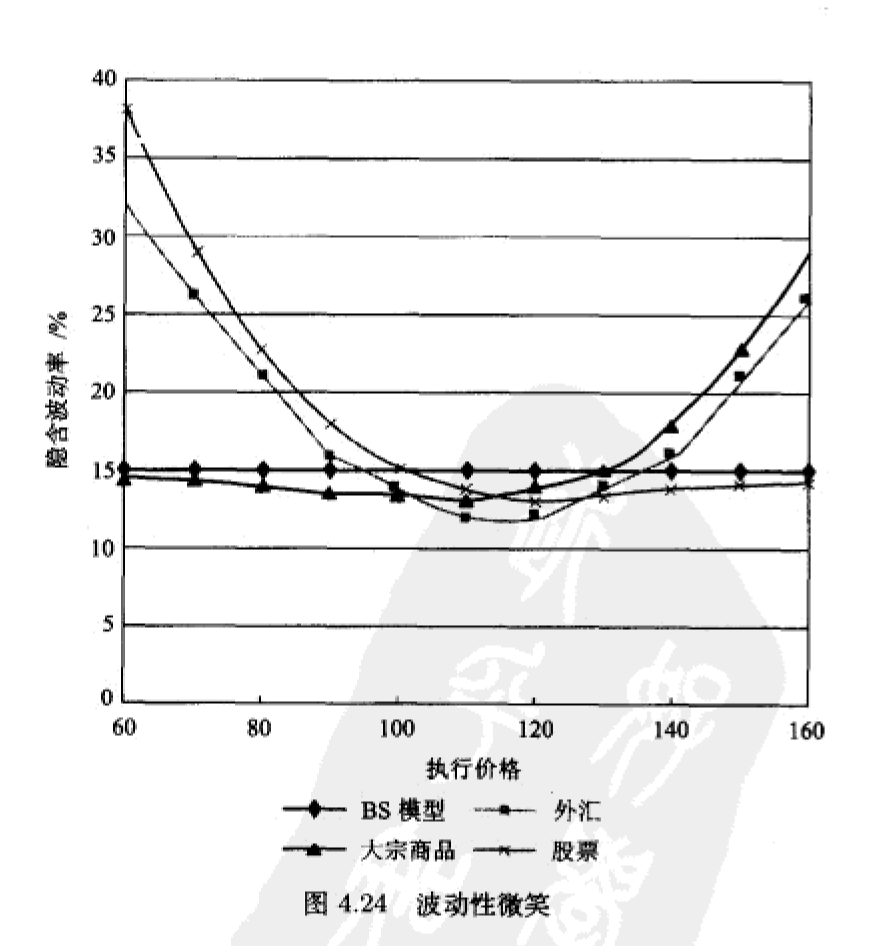


图 4.24　波动性微笑

§4.3.3 二叉树 (Binomial) 定价模型：一个衍生产品的无套利定价过程

§4.3.3.1 二叉树定价模型

二叉树定价概念是将问题简化到在相对短的一段时间内，资产价格的变化只有两种可能：从 S 涨到 Su, 其中 u 为大于 1 的实数；从 S 跌到 Sd, 其中 d 为小于 1 的实数．并且假定出现 Su 的概率为 q, 出现 Sd 的概率为 $1-q$ ．

例 4.3.1 假定 $S=10$, $u=1.1$, $d=0.95, q=0.6$, 则有 60% 的可能性涨到 $Su=10\times 1.1=11$, 有 40% 的可能性跌到 $Sd=10\times 0.95=9.5$ ．

考虑一个衍生产品的收益结构为

$$f_u\begin{cases} >0, & \text{如果上涨状态发生} \\ =0, & \text{如果下跌状态发生} \end{cases} \tag{4.3.40}$$

和

$$f_d\begin{cases} =0, & \text{如果上涨状态发生} \\ >0, & \text{如果下跌状态发生} \end{cases} \tag{4.3.41}$$

例如，对于看涨欧式期权为

$$f_u=\max\{Su-K,0\} \tag{4.3.42}$$

和

$$f_d=\max\{Sd-K,0\} \tag{4.3.43}$$

例 4.3.2 继续例 4.3.1, 如果 $K=10$, 则有

$$f_u=\max\{11-10,0\}=1$$

和

$$f_d=\max\{9.5-10,0\}=0$$

如果 $K=9$, 则有

$$f_u=\max\{11-9,0\}=2$$

和

$$f_d=\max\{9.5-9,0\}=0.5$$

二叉树定价模型

第一步：构造一个无风险的投资组合

持有标的物的 Δ 份额的头寸和 -1 份的衍生产品的头寸，则该组合在上涨状态的收益为 $\Delta Su-f_u$, 在下跌状态的收益为 $\Delta Sd-f_d$. 为使得该组合成为无风险组合，我们要求 Δ 必须满足

$$\Delta Su-f_u=\Delta Sd-f_d \tag{4.3.44}$$

这样求出

$$\Delta=\frac{f_u-f_d}{S(u-d)} \tag{4.3.45}$$

这个组合被称为 Δ 对冲.

例 4.3.3　由例 4.3.2 我们得到如果 $K=10$, 则有

$$\Delta=\frac{1-0}{10\times(1.1-0.95)}=\frac{2}{3}$$

如果 $K=9$, 则有

$$\Delta=\frac{2-0.5}{10\times(1.1-0.95)}=1$$

第二步：确定衍生产品的价值 f 等于该无风险组合的投资收益用无风险利率折现的现值.

见图 4.25, 即

$$\Delta S-f=PV=\mathrm{e}^{-r}(\Delta Su-f_u) \tag{4.3.46}$$

其中 PV 为现值 (Present-value),r 为无风险利率. 这样推出该衍生产品的价值 f 必须满足

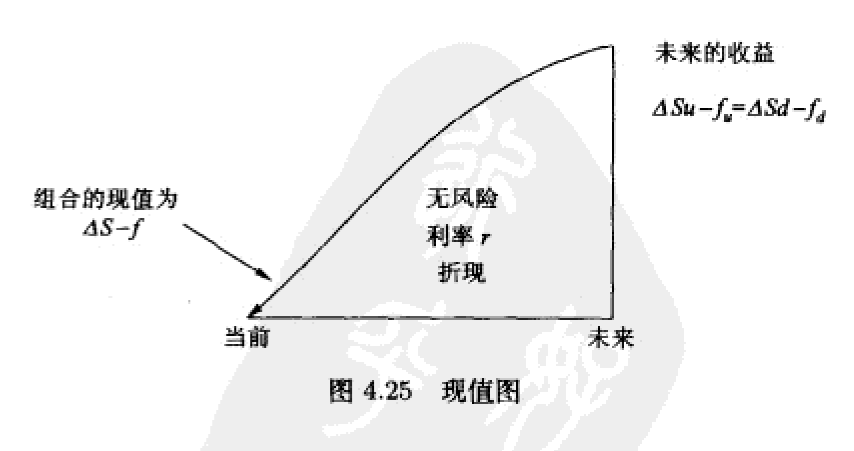


图 4.25　现值图

$$\begin{aligned}f&=\Delta S(1-\mathrm{e}^{-r}u)+\mathrm{e}^{-r}f_u\\&=\frac{f_u-f_d}{u-d}(1-\mathrm{e}^{-r}u)+\mathrm{e}^{-r}f_u\\&=\mathrm{e}^{-r}(pf_u+(1-p)f_d)\end{aligned} \tag{4.3.47}$$

其中

$$p=\frac{e^r-d}{u-d} \tag{4.3.48}$$

由于 $d<1<u$ 和 $e^r\geqslant 1$, 我们知道 $p>0$, 如果再约束 $p\leqslant 1$, 则 $\{p,1-p\}$ 是所谓的上涨状态和下跌状态的风险中性概率分布。

注记 4 风险中性概率 p 和 $1-p$ 的另一种等价理解是：令 $f_u=1$ 和 $f_d=0$, 则我们有上涨状态的 AD 证券的价格为

$$\pi_u = e^{-r}(f_u p + f_d(1-p)) \tag{4.3.49}$$

$$= e^{-r}p \tag{4.3.50}$$

即 $e^{-r}p$ 是上涨状态 AD 证券的价格，同理我们可以证明

$$\pi_d = e^{-r}(1-p) \tag{4.3.51}$$

即 $e^{-r}(1-p)$ 是下跌状态 AD 证券的价格。

例 4.3.4 考虑例 4.3.2 并且假定 $r=0$, 则由定价方程 (4.3.47) 我们知道执行价格为 10 的看涨期权的价值为

$$f=e^{-0}\cdot(p\cdot 1+(1-p)\cdot 0)=p$$

和

$$p=\frac{1-0.95}{1.1-0.95}=\frac{1}{3}$$

上涨状态的风险中性概率 $p=\dfrac{1}{3}$ 明显不同于自然的概率分布，在例 4.3.1 中，出现上涨状态的概率为 60%(后面我们将解释为什么 $p<60\%$)。当执行价格为 9 时，我们得到看涨期权的价值为

$$f=e^{-0}\left(\left(\frac{1}{3}\right)\times 2+\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\right)=1$$

风险中性定价公式 (4.3.47) 是非常有用的一个公式，例如，对于标的物自身来讲 (我们将其视为一个衍生产品), 我们有 $f_u=Su$ 和 $f_d=Sd$, 则我们有

$$f=S = e^{-r}(pSu+(1-p)Sd)$$

$$= e^{-r}E^*(S_1) \tag{4.3.52}$$

另外，将上面方程的两边同除以 S, 我们得到 p 必须满足

$$1=e^{-r}(pu+(1-p)d) \tag{4.3.53}$$

通过简单计算，我们再次得到上涨状态的风险中性概率为

$$p = \frac{e^r - d}{u - d} \tag{4.3.54}$$

§4.3.3.2　远期合约定价和风险交换

一个远期合约是买卖双方在交易成交时，双方互相不支付对方任何金钱，但承诺在到期时以一个约定的价格 F (称为远期价格,Forward Price) 来交割收益 $S_1 - F$, 如果 $S_1 - F > 0$, 则由远期合同的卖方支付给合同的买方 $S_1 - F$ 的金额，反之，则由买方支付给卖方金额 $-(S_1 - F) > 0$ 。

现在的问题是远期价格在合约交易时 ($t = 0$) 应该定为多少，才能使得买卖双方觉得 “公平”，使得任何一方均没有套利的机会并且成交交易？答案是，寻找 F 使得

$$0 = e^{-r} E^*(S_1 - F) \tag{4.3.55}$$

即

$$F = E^*(S_1) = pSu + (1 - p)Sd \tag{4.3.56}$$

我们可以从风险共担 (Risk Sharing) 或均衡定价 的角度来看这个 “公平” 定价公式。我们有风险交换图 (见图 4.26) 。

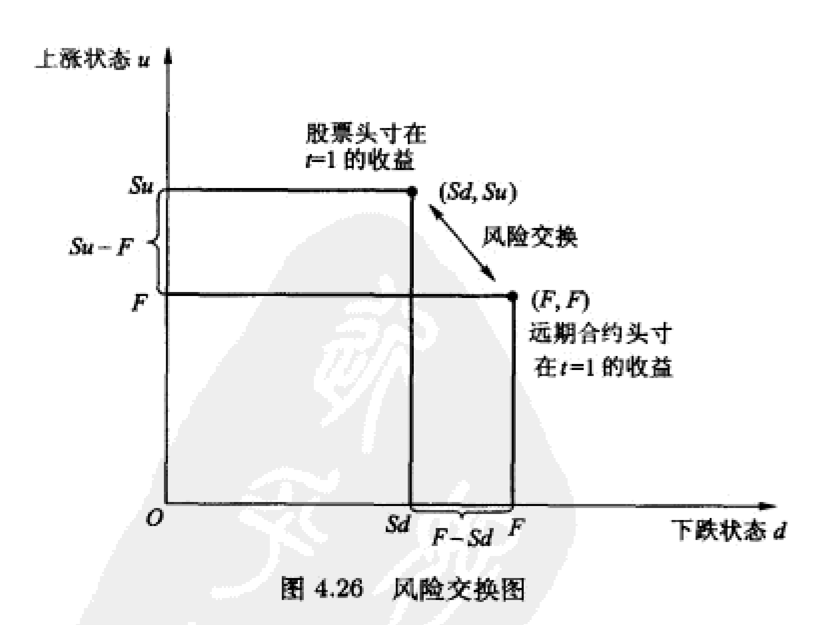


图 4.26　风险交换图

由 (2.7.7) 式，我们有风险头寸交换的边际效用比

$$MRS_{d,u} = \frac{dC_u}{dC_d} = \frac{Su - F}{F - Sd} \tag{4.3.57}$$

另外一方面，由 (2.7.4) 式，我们有

$$\frac{\pi_d}{\pi_u} = MRS_{d,u} = \frac{Su - F}{F - Sd} \tag{4.3.58}$$

由 (4.3.57) 和 (4.3.58) 式，我们得到

$$\frac{1-p}{p} = \frac{\pi_d}{\pi_u} = \frac{Su - F}{F - Sd} \tag{4.3.59}$$

即 $(F - Sd)(1-p) = (Su - F)p$．从而得到熟知的 F 的表达式，这说明 F 使得

$$\text{损失的期望值} = (F - Sd)(1-p) \tag{4.3.60}$$

$$= (Su - F)p \tag{4.3.61}$$

$$= \text{盈利的期望值} \tag{4.3.62}$$

见图 4.27．

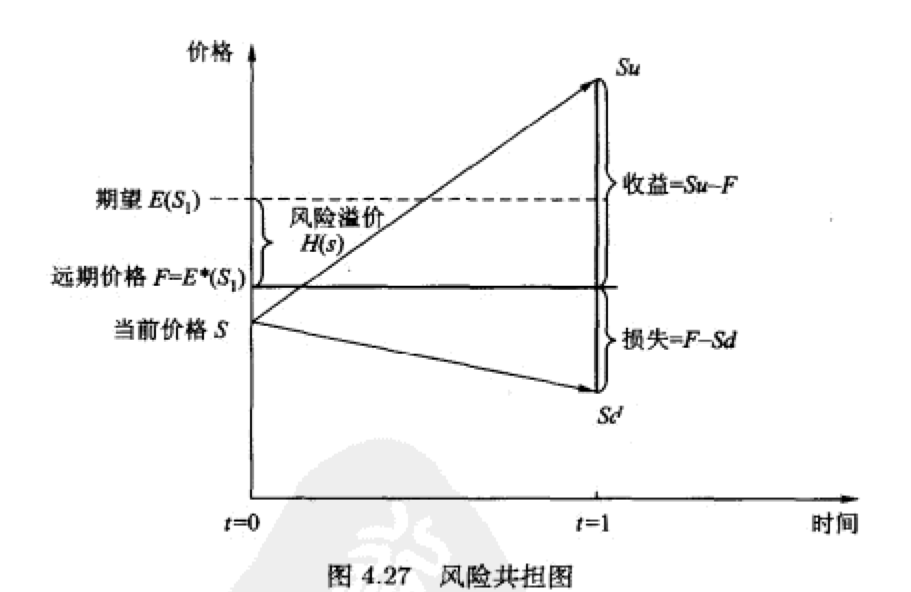


图 4.27　风险共担图

§4.3.4　客观概率 q 和风险中性概率 p 之间的关系：风险溢价

记 q 为上涨状态的客观概率，即

$$q = P(S_{t=1} = Su) \tag{4.3.63}$$

记 $1-q$ 为下跌状态的客观概率，即

$$1 - q = P(S_{t=1} = Sd) \tag{4.3.64}$$

则相应的期望值为

$$E(S_1) = qSu + (1-q)Sd \tag{4.3.65}$$

由于 $F = pSu + (1-p)Sd$, 我们得到

$$F - E(S_1) = (p-q)(u-d)S \tag{4.3.66}$$

由确定性等价物公式 (2.5.5), 我们有

$$CE(S_1) = E(S_1) - H(S_1) \tag{4.3.67}$$

由于在远期合约中，确定性等价物为 F, 即 $CE(S_1) = F$, 这样我们得到风险溢价

$$H(S_1) = -(p-q)(u-d)S \tag{4.3.68}$$

对于风险厌恶的投资者来讲，我们有

$$H(S_1) > 0 \tag{4.3.69}$$

由于 $u > d$, 我们只能有 $p < q$, 相应地 $1-p > 1-q$, 这样我们得到风险中性定价的重要结论：

定理 4.3.1　如果我们视 $q_u = e^{-r}q$ 为上涨状态的"客观"价格，$q_d = e^{-r}(1-q)$ 为下跌状态的"客观"价格，则对于风险厌恶的投资者来讲，在风险中性的世界里，有

(1) 上涨状态的价格要便宜，即

$$\pi_u < q_u \tag{4.3.70}$$

下跌状态的价格要贵，即

$$\pi_d > q_d \tag{4.3.71}$$

这说明，如果要一个风险厌恶者去承担下跌状态（如保险例子中的房子着火的状态）的风险的话，它要求风险补偿，远期价格 F 比 $E(S_1)$ 越低，说明风险厌恶投资者要求越高的风险补偿.

(2) 在 $t = 0$ 时刻买卖双方同意的远期价格不会是在 $t = 1$ 时刻资产的价格，因为那时的价格或者是 Su 或者是 Sd ， F 越高，说明投资者赌发生上涨状态的可能性 p 越大，或者 Su 会达到更高的水平， F 越低，说明投资者赌下跌状态的可能性 $1-p$ 越大，或者 Sd 下跌得更低。远期合约越接近到期， F 越接近于 S_1 是因为 u 和 d 的差别越来越小。

例 4.3.5 由例 4.3.1 我们得到

$$E_0(S_1) = 0.6 \times 11 + (1-0.6) \times 9.5 = 10.4$$

如果 $r=0$, $F=S=10$ 元，则

$$\frac{F-E_0(S_1)}{S} = (p-q)(u-d) \tag{4.3.72}$$

给出

$$\frac{10-10.4}{10} = \left(\frac{1}{3}-0.6\right)(1.1-0.95) = -0.04$$

即风险溢价 $H(S_1) = 0.04 \times 10 = 0.4$(元)。

二叉树的数值解

二叉树在求期权定价的数值解时非常有用，罗斯 (Ross)、考克斯 (Cox) 和马克 · 鲁宾斯坦 (Mark Rubinstein), 于 1979 年给出如下的 n 步二叉树欧式看涨期权方程 (见图 4.28)

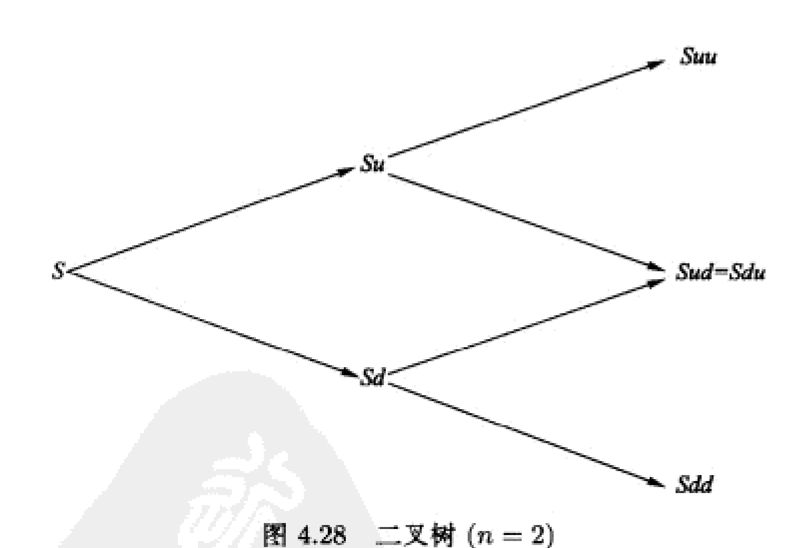


图 4.28 二叉树 $(n=2)$

$$c = \frac{1}{r^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\max\{Su^jd^{n-j}-K,0\} \tag{4.3.73}$$

其中 $\binom{n}{j}$ 为二项系数，可以证明

$$\lim_{n\to+\infty} c = S\cdot N(d_1) - K\cdot B(0,T)\cdot N(d_2) \tag{4.3.74}$$

即布莱克 — 斯科尔斯公式. 一般地, 我们设 $u = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}$ 和 $d = u^{-1}$, 其中 T 为期权的剩余期限 (以年为单位, 如还剩 3 个月, 则 $T = \frac{3}{12} = 0.25$ 年),σ 为年化的波动性.

§4.4 可转债的定价

§4.4.1 可转债的定义

根据我国国务院证券委员会颁布的《可转换公司债券管理暂行办法》第三条规定: 可转换公司债券 (Convertible Bond) 是指发行人依照法定程序发行, 在一定时间内依据约定的条件可以转换成股份的公司债券.

图 4.29 显示了可转换债券的主要特点:

(1) 债券持有者在转换期内有按约定价格转换为股票的权利, 可转债转换为股票, 债权由股权代替, 债权债务关系消失.

(2) 在可转换债券未转换成股票之前, 债券持有者可以持续持有债券, 按照约定的票面利率获得利息收入, 债券到期后可以获得本息, 并享有财产清算优先追索权.

(3) 可转换债券一般可在交易所上市交易, 还可以在交易过程中获取差价.

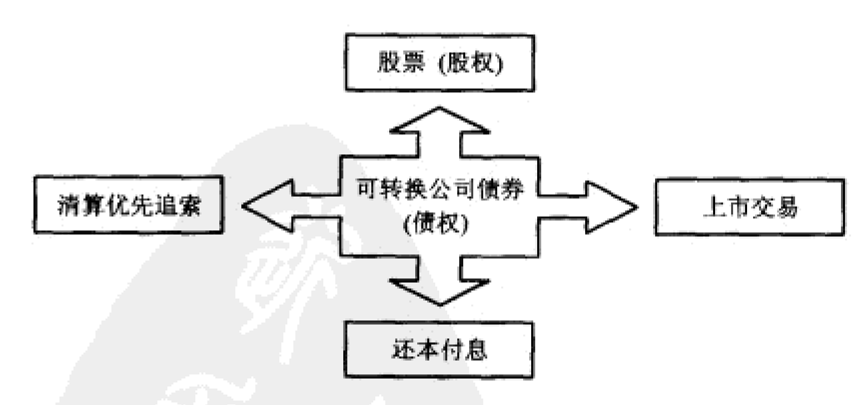


图 4.29 可转换债券的主要特点

可转换公司债券由于其兼具债权和股权的特点, 已经发展成为国际资本市场上的重要融资工具之一. 全球可转换公司债权市值呈稳定上升趋势. 1998 年 10 月市值已超过 4000 亿美元, 主要分布在亚洲 (39%) 、美国 (37.5%) 和西欧 (13.8%) . 1995 年、 1996 年全球可转换公司债券发行总额分别为 334.4 亿美

元和 798.5 亿美元，约占同期全球企业债券发行总量的 5%~6%, 主要分布在美国 (40.16%) 、日本 (33.84%) 、和瑞士 (5.82%) 。中国香港和台湾地区在全球可转换公司债券发行市场中也占有一席之地，分别为 1.91% 和 1.08% 。进入 2000 年，亚洲可转换公司债券市场出现明显的复苏，据统计， 2000 年亚洲地区的股本融资中，首次公开上市的股票占 50%, 可转换公司债券占 20% 。 2001 年初到目前亚洲地区的股本融资中，首次公开上市股票的比例已下降到 23%, 可转债的比例则上升到 63% 。根据最近一期《商业周刊》的介绍， 2001 年上半年可转债的发行量已超过 500 亿美元.

§4.4.2 可转换债券的一些数学记号

S_t : 时刻 t 时的股票价格;

C_t : 时刻 t 时的转股价格;

BMV_t : 一份转债的市场价格;

BV_t : 时刻 t 时的 "虚拟" 的基于每股的一份转债的债权价值;

q_t : 时刻 t 时的转股数;

FV : 一份转债的票面金额;

B_t : 时刻 t 时的 "虚拟" 的基于每股的一份转债的市场价值 (价格);

M : 转债发行的总金额;

N_c : 转债的总流通量;

EMV_t : 时刻 t 时一份转债内含 (Embedded) 的股权市场价值;

P_t^{CB} : 时刻 t 时一份转债的交易价格 (Quoted Price);

T : 转债到期日。

我们有一些关系:

$$N_c = \frac{M}{FV} \tag{4.4.1}$$

例 4.4.1 $M = 2$ 亿元， $FV = 100$ 元，则 $N_c = 200$ 万份转债.

$$P_t^{CB} = \frac{BMV_t}{FV} \times 100 \tag{4.4.2}$$

例 4.4.2 $FV = 100$ 元， $BMV_t = 103$ 元，则 $P_t^{CB} = 103$; $FV = 5\,000$ 美元， $BMV_t = 5\,025$ 美元，则 $P_t^{CB} = 100.5$ 。

$$q_t = \frac{FV}{C_t} \tag{4.4.3}$$

例 4.4.3　$FV = 100$ 元，初始转股价 $C_0 = 12$ 元，则 $q_0 = \frac{100}{12} \approx 8.333$ 股.

$$B_t = \frac{BMV_t}{q_t} = \frac{FV \cdot P_t^{CB}}{q_t} \tag{4.4.4}$$

转债的股权价值

$$EMV_t = S_t \cdot q_t \tag{4.4.5}$$

转债的债权价值

$$BMV_t = B_t \cdot q_t = \frac{B_t \cdot FV}{C_t} \tag{4.4.6}$$

则我们有转债的溢价

$$\begin{aligned} PUM_t =& \frac{BMV_t - EMV_t}{EMV_t} \times 100\% \\ =& \frac{B_t - S_t}{S_t} \times 100\% \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

当一个转债发行时，溢价一般在 10%~30% 之间.

§4.4.3　回售条件与赎回条件的讨论

标准的转债进入转股期之后，给了转债持有人两个选择，即转股或回售，这样就给了转债持有人美式选择权，即转债的价值由下列公式来决定：

$$B_t = \mathrm{e}^{-r(T-\tau)} \max_{t \leqslant \tau \leqslant T} \{E^{\pi}(\max\{S_t, BV_t\})\}$$

其中 π 为风险中性概率分布.

这样，我们知道当 S_t 很低时，B_t 表现得像一个债券，而当 S_t 相对高时，B_t 表现得像股票，并且我们知道

$$B_t \geqslant BV_t, \quad t \in [0, T]$$

其中 BV_t 是一个直接债券的价值，它是一个时间 t 的单调增加的函数，因此从这个意义上来讲，标准转债是一种保底的金融品种，形象上，我们有图 4.30 .

但现在回售条款的设计使得这种美式的选择权根本不存在，目前条款的设计是 (1) 如果有连续 20 天股价低于转股价的 70%，或 (2) 如果在 30 天交易之中有 20 天的股价低于转股价的 70% 则给转债持有人一个回售的选择，回售的价格为票面价值 × (1+ 几个百分点)，并且这种回售条款一年之中只能执行一次，同时必须是这一年之中第一次出现 (1) 或 (2) 的情形才可以执行该回售权力，

而且如果不执行的话，以后在这一年中即使出现 (1) 或 (2) 的情形，转债持有人也已经没有执行回售的权利来保护其转债资产的价值.

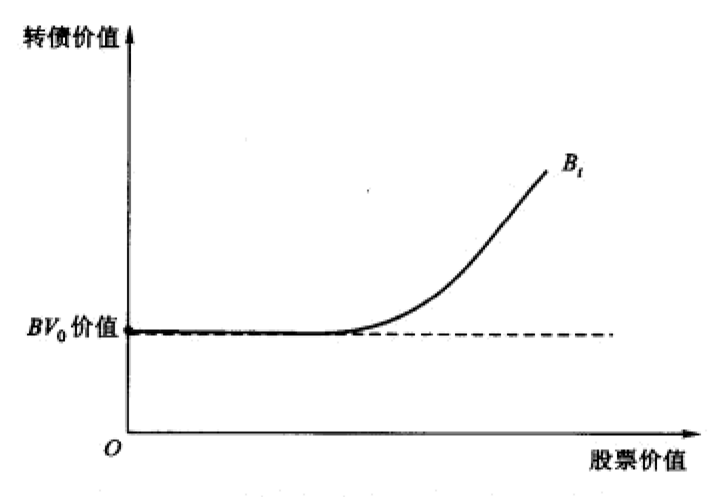


图 4.30 转债的债券价值和股票的股票价值

由于当 (1) 或 (2) 的情形出现时，股价已严重低于转股价，转债持有人根本不存在两种选择权的问题，仅剩下唯一的一年一次的回售机会，因此在这种回售条款的设计之下，转债的保底特性基本上被去掉，从而存在跌破其发行价的风险.

从另一个角度讲，去掉转债的美式债券权力之后，大多数情形之下，转债持有人只剩下现在转股还是等以后转股的选择，但持有股票的情形基本是一样的。见图 4.31 .

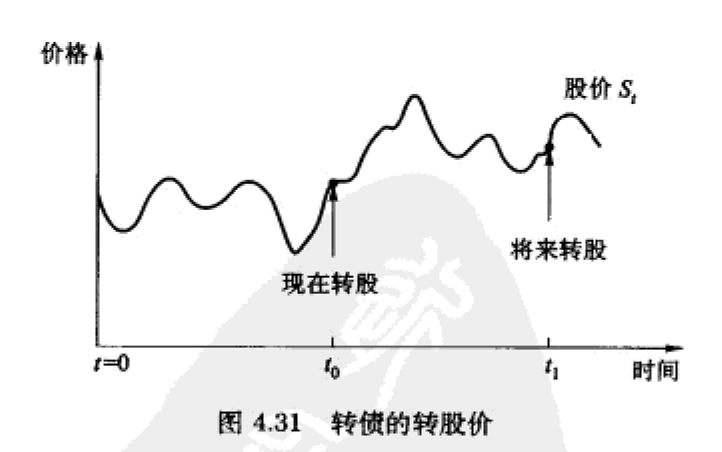


图 4.31 转债的转股价

在 t_0 时刻转股并持有股票到 t_1 的收益为

$$S_{t_1} - S_{t_0} + S_{t_0} - BV_0 = S_{t_1} - BV_0$$

在 t_0 时刻转股并立即卖掉股票的收益为

$$S_{t_1} - BV_0$$

因此，可以看出由于回售条款的设计，使得在股价的轨道上美式的两项选择权根本不存在.

$$G(20, 70\%, t) \neq 20$$

或

$$H(30, 70\%, t) < 20$$

其中函数 $G(n, a\%, t)$ 表示在 t 时刻，最近 n 个交易日内股价连续低于转股价的 $a\%$ 的最大天数； $H(n, a\%, t)$ 表示在 t 时刻，最近 n 个交易日内股价低于转股价的 $a\%$ 的天数.

从出现唯一回售条件的可能性来讲为

$$\begin{aligned}
&P(S_{t-19} \leqslant 0.7C_t, \cdots, S_t \leqslant 0.7C_t) \\
&= \prod_{\tau=t-19}^{t-1} P(S_{\tau+1} < 0.7C_t | S_{t-19} < 0.7C_t, \cdots, S_\tau < 0.7C_t) \cdot P(S_{t-19} < 0.7C_t)
\end{aligned}$$

引理　$p(t, x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}$, 则对任意的 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n$, 由独立增量性容易知道, $B_{t1}, B_{t2}, \cdots, B_{tn}$ 的联合密度为

$$f(u_1, u_2, \cdots, u_n) = p(t_1, u_1)p(t_2 - t_1, u_2 - u_1) \cdots p(t_n - t_{n-1}, u_n - u_{n-1})$$

从而, B 的任意有限维分布为

$$\begin{aligned}
&P(\omega : W_{t1} \leqslant x_1, \cdots, W_{tn} \leqslant x_n) \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, \cdots, u_n) \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{\exp\left(-\left(\dfrac{u_1^2}{2t_1} + \dfrac{(u_2 - u_1)^2}{2(t_2 - t_1)} + \cdots + \dfrac{(u_n - u_{n-1})^2}{2(t_n - t_{n-1})}\right)\right)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{t_1(t_2 - t_1) \cdots (t_n - t_{n-1})}} \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n
\end{aligned}$$

定理　设股价服从布莱克 — 斯科尔斯方程，则

(1) 出现回售条件的概率

$$p_{\text{put}}(t) = \int_{-\infty}^{d_{t-19}} \cdots \int_{-\infty}^{d_t} \frac{\exp\left(-\left(\dfrac{u_{19}^2}{2(t-19)} + \dfrac{1}{2}(u_{18} - u_{17})^2 + \cdots + \dfrac{1}{2}(u_2 - u_1)^2\right)\right)}{(2\pi)^{10}\sqrt{t-19}} \mathrm{d}u_{19} \cdots \mathrm{d}u_1$$

(2) 回售的价值为 $\max\limits_t \{FV \cdot (1 + r) \cdot p_{\text{put}}(t)\}$

证明：由于股价服从随机微分方程

$$\mathrm{d}S_t = S_t(\mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t)$$

我们有

$$\ln S_t = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t$$

这样得到

$$\ln S_t - \ln S_{t-1} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma(W_t - W_{t-1})$$

由出现回售条件的概率

$$\begin{aligned}p_{\text{put}}(t) =& P(S_{t-19} \leqslant 0.7C_t, \cdots, S_t \leqslant 0.7C_t)\\ =& P(\ln S_{t-19} \leqslant \ln 0.7 + \ln C_t, \cdots, \ln S_t \leqslant \ln 0.7 + \ln C_t)\end{aligned}$$

我们有

$$\ln S_{t-i} \leqslant \ln 0.7 + \ln C_t$$

等价于

$$\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-i) + \sigma W_{t-i} \leqslant \ln 0.7 + \ln C_t$$

即

$$W_{t-i} \leqslant \frac{1}{\sigma}\left(\ln 0.7 + \ln C_t - \ln S_0 - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-i)\right)$$

记上面不等式的右边为 d_{t-i}，则我们有

$$W_{t-i} \leqslant d_{t-i}$$

这样我们得到

$$\begin{aligned}&P(S_{t-19} \leqslant 0.7C_t, \cdots, S_t \leqslant 0.7C_t)\\ =&P(W_{t-19} \leqslant d_{t-19}, \cdots, W_t \leqslant d_t)\end{aligned}$$

由引理我们知道

$$p_{\text{put}}(t) = \int_{-\infty}^{d_{t-19}} \cdots \int_{-\infty}^{d_t} \frac{\exp\left(-\left(\frac{u_{19}^2}{2(t-19)} + \frac{1}{2}(u_{18}-u_{17})^2 + \cdots + \frac{1}{2}(u_2-u_1)^2\right)\right)}{(2\pi)^{10}\sqrt{t-19}} \mathrm{d}u_{19} \cdots \mathrm{d}u_1$$

□

以上概率比较难想像到底有多大，如果采用二叉树方法可提供一个大致的估计.

§4.4.4　标准转债的定价模型

在不改变转股价的前提下，将转债价值 B 视为股价和时间的函数

$$B = B(S, t)$$

则我们可构造一个投资组合：一份转债加负 Δ 份股票 (即卖空 Δ 份股票) .

设股价服从随机微分方程

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = r\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t$$

其中 $\{W_t\}$ 为标准布朗运动，则由 Ito 微分，取 $\Delta = \dfrac{\partial B}{\partial S}$，则得到布莱克 — 斯科尔斯带自由边界的偏微分方程

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 B}{\partial S^2} + r(S - D_t)\frac{\partial B}{\partial S} - rV \leqslant 0$$

满足边界条件

$$B_T = \max\{S_T, BV_T\}$$

$$B(S, t_C^-) = B(S, t_C^+) + K$$

其中 K 为 t_C 时刻付的利息. 无风险套利条件

$$B(S, t) \geqslant S_t$$

赎回条件

$$B(S, t) \leqslant M_{\text{call}}$$

回售条件

$$B(S, t) \geqslant M_{\text{put}}$$

其中赎回和回售时间或区间段是事先给定的.

Brennan 和 Schwarts(1977) 使用有限差分方程得到上述方程的逼近解. 图 4.32 直观地给出了轻债期权价值的范围，图 4.33 描绘了与转债价值有关的几种价值形式.

Connolly(1998) 使用二叉树方法给出转债的定价模型，下面给出标准转债的一些性质.

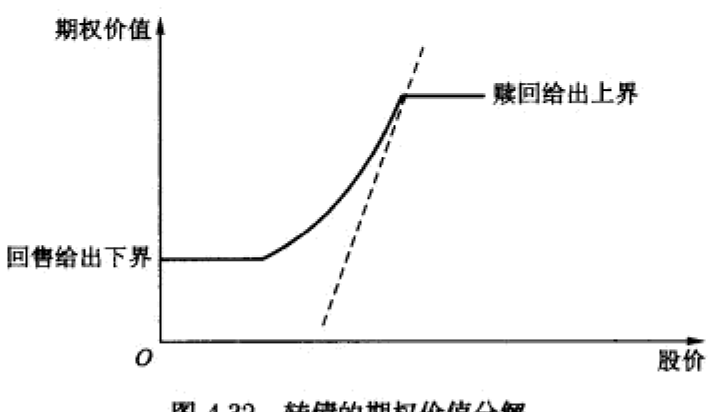


图 4.32 转债的期权价值分解

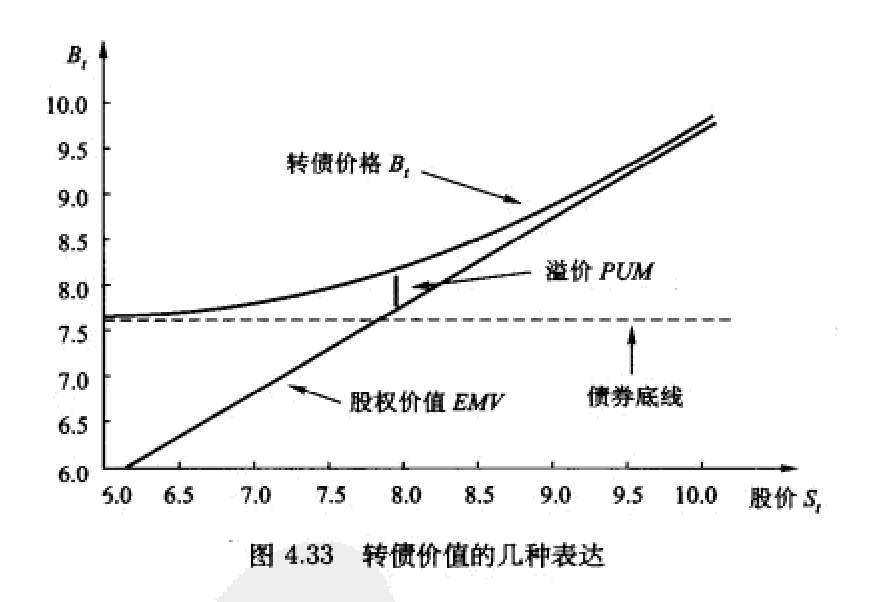


图 4.33 转债价值的几种表达

股价的波动性增加会使转债的价值增加 (见图 4.34) .

当股价低时，转债对利率的变化敏感，当股价高时，转债对利率的变化非常不敏感 (见图 4.35) .

图 4.36~ 图 4.38 描绘了不同条件下的转债价值. 从中可以看出转债定价是一个比较困难的问题，而国内转债的各项条款使其成为更为复杂的转债，一种依赖股价路径 (Path-dependent) 的期权问题.

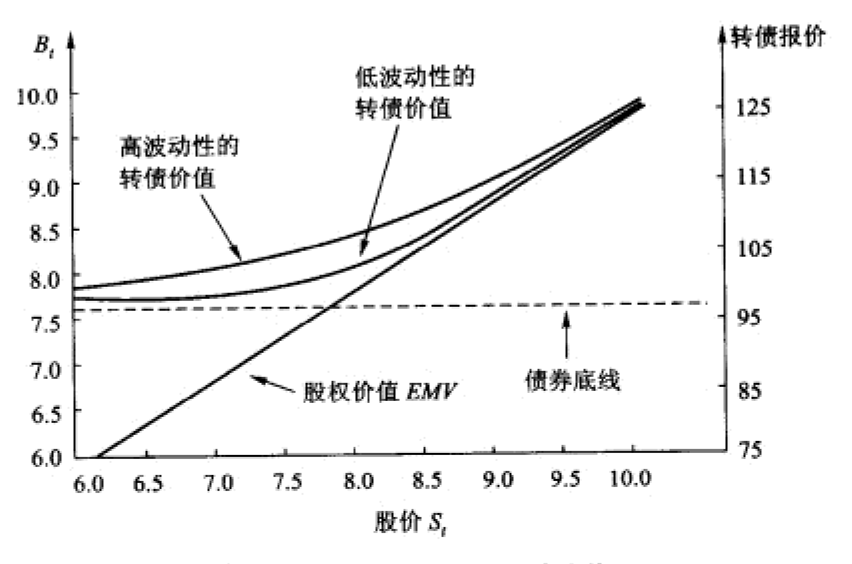


图 4.34 不同波动下的转债价值

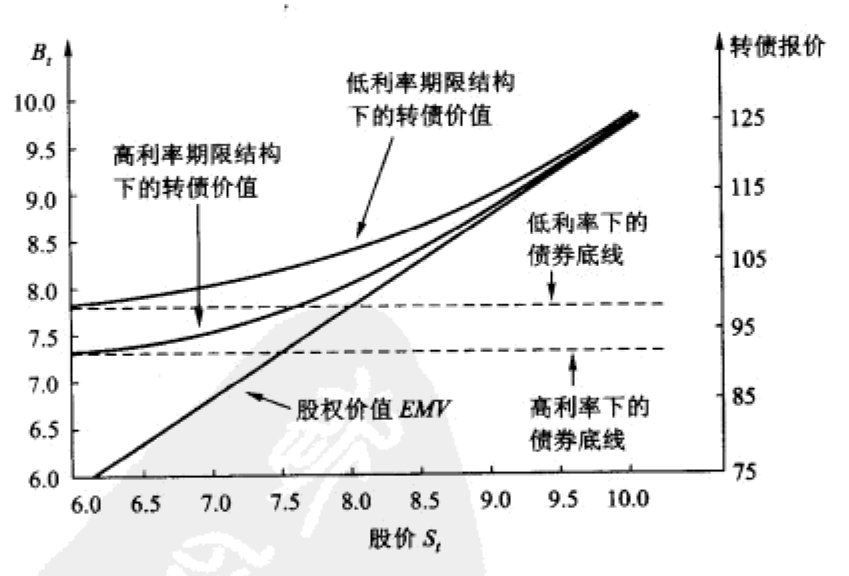


图 4.35 不同利率条件下的转债价值

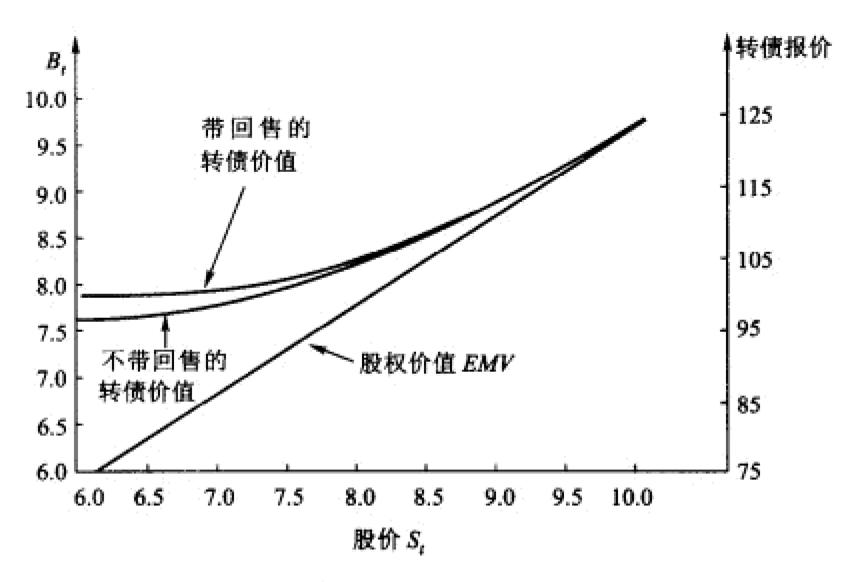


图 4.36 带和不带回售条件的转债价值

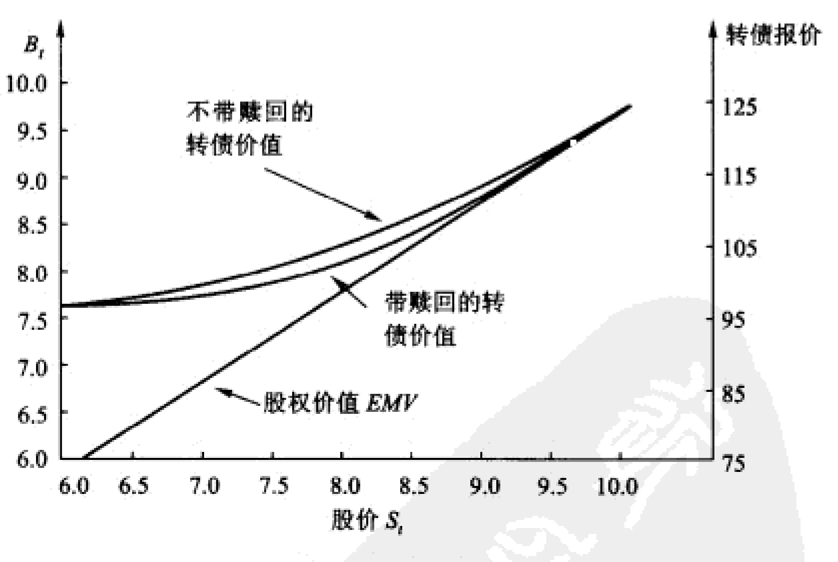


图 4.37 带和不带赎回条件的转债价值

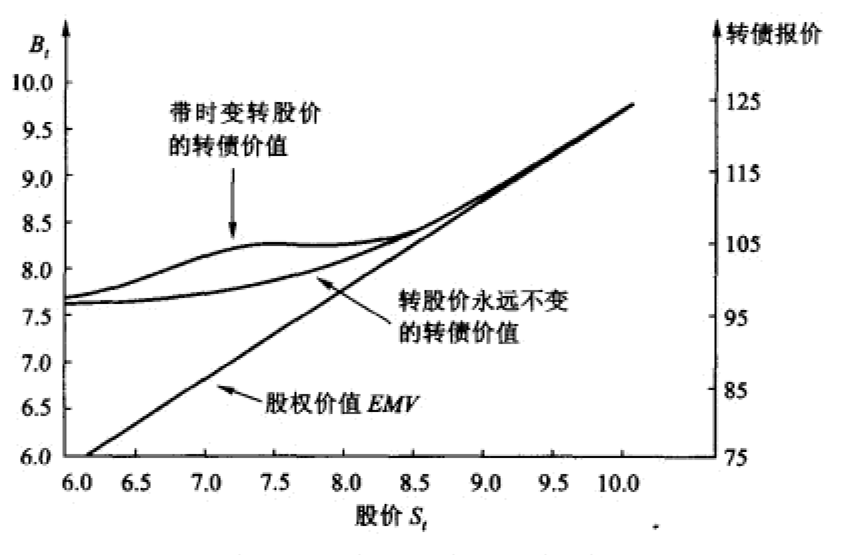


图 4.38 带时变转股条件的转债价值

§4.5 总结

在本章中我们针对每个金融工具自身固有的特点，分别讨论了股权类工具、固定收益类工具、股权与固定收益类混合工具以及期货和期权类工具的定价方法。



参考文献

[1] Abel A B. Asset prices under habit formation and catching up with the Jones[J]. American Economic Review Papers and Proceedings, 1990, 80: 38-42.

[2] Acerbi C, Nordio C, Sirtori C. Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management[EB/OL]. Working paper, 2001. http://www.gloriamundi.org/var/wps.html.

[3] Acerbi C, Tasche D. On the Coherence of Expected Snortfall[EB/OL]. Working paper, 2001. http://www.gloriamundi.org/var/wps.html.

[4] Acerbi C, Tasche D. Expected Shortfall: A Natural Coherent Alternative to Value at Risk[R], Wroking Paper. Milano, Italy: Abexbank, 2001.

[5] Alexander C. Bayesian Methods for Measuring Operational Risk[R]. Discussion Papers in Finance.Reading:University of Reading, 2000.

[6] Allen F, Douglas G. Innovations in financial services, relationships, and risk sharing[J]. Management Science, 1999, 45(9): 1239-1253.

[7] Allen F, Santomero A M. The theory of financial intermediation[J]. Journal of Banking and Finance, 1997, 21: 1461-1486.

[8] Ando A, Modigliani F. The life-cycle hypothesis of saving: Aggregate implications and tests[J]. American Economic Review, 1963, 53: 55-84.

[9] Andrews D W K. Tests for parameter instability and structural change with unknown change point[J]. Econometrica, 1993, 61: 821-856.

[10] Arnott R D. Risk budgeting and portable alpha[J]. Journal of Investing, 2002, 11(2): 15-22.

[11] Arrow K J. Aspects of the Theory of Risk Bearing[M]. Helsini: Yrjo Janssonin Saatio, 1965.

[12] Arrow K J. Essays in the Theory of Risk Bearing[M]. Amsterdam: North-Holland, 1971.

[13] Artzner P. Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance[J]. North American Actuarial Journal, 1999, 2: 11-25.

[14] Artzner P, Delbaen F, Eber J M, et al. Coherent measures of risk[J]. Mathematical Finance, 1999, 9(3): 203-228.

[15] Artzner P, Delbaen F, Eber J M,et al. Thinking coherently[J]. Risk Magazine, 1997, 10: 68-71.

[16] Attanasio O P, Browning M. Consumption over the life cycle and over the business cycle[J]. American Economic Review, 1995, 85: 1118-1137.

[17] Attanasio O P, Weber G. Consumption growth, the interest rate, and aggregation[J]. Review of Economic Studies, 1993, 60: 631-649.

[18] Attanasio O P, Weber G. Is consumption growth consistent with intertemporal optimization? Evidence from the consumer expenditure survey[J]. Journal of Political Economy, 1995, 103: 1121-1157.

[19] Aumann S. Values of Non-Atomic Games[M]. Princeton: Princeton University Press, 1974.

[20] Backus D K, Gregory A W , Zin S E . Risk premiums in the term structure: Evidence from artificial economies[J]. Journal of Monetary Economics, 1989, 24: 371-399.

[21] Balduzzi P, Kallal H. Risk premia and variance bounds[J]. Journal of Finance, 1997, 52: 1913-1950.

[22] Balkema A A, De Haan L. Residual life time at great age[J]. Annals of Probability, 1974, 2(5): 792-804.

[23] Bansal R, Coleman J W. A monetary explanation of the equity premium, term premium and risk free asset rate puzzles[J]. Journal of Political Economy, 1996,104: 1135-1171.

[24] Bansal R, Lehmann B N. Growth-optimal portfolio restrictions on asset pricing models[J]. Macroeconomic Dynamics, 1997, 1: 333-354.

[25] Bansal R, Viswanathan S . No arbitrage and arbitrage pricing: A new approach[J]. Journal of Finance, 1993, 48: 1231-1262.

[26] Barron D P. On the utility theoretic foundations of mean-variance analysis[J].Journal of Finance, 1977, 32(5): 1683-1697.

[27] Baumol W J. An expected gain-confidence limit criterion for portfolio selection[J]. Management Science. 1963, 10: 174-182.

[28] Berveniste L, Scheinkman J. On the differentiability of the value function in dynamic models of economics[J]. Econometrica, 1979, 47: 727-732.

[29] Bevan A, Winkelmann K. Using the Black-Litterman Global Asset Allocation Model: three years of practical experience[R]. New York: Goldman Sachs, 1998.

[30] Black F. Noise[J]. Journal of Finance, 1986, 41(3): 529-543.

[31] Black F, Litterman R. Asset allocation: combining investor views with market equilibrium[J]. Journal of Fixed Income, 1991, 1: 7-18.

[32] Black F, Litterman R. Global portfolio optimization[J]. Financial Analysts Journal, 1992, 48(5): 28-43.

[33] Blanchard O J, Fischer S. Lectures on Macroeconomics[M]. Cambridge: MIT Press, 1989.

[34] Boldrin M, Christiano L, Fisher J. Habit persistence and asset returns in an exchange economy[J]. Macroeconomic Dynamics, 1997, 1: 312-332.

[35] Borch K. The safety loading of reinsurance premiums[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 1960, 43: 163-184.

[36] Borch K. Equilibrium in a reinsurance market[J]. Econometrica, 1962, 30: 424-444.

[37] Bossaerts P. The Paradox of asset pricing models[M]. Princeton: Princeton University Press, 2002.

[38] Bradford C. The equity risk premium: the long-run future of the stock market[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1999.

[39] Brav A, Constantinides G M , Geczy C C. Asset pricing with heterogeneous consumers and limited participation: Empirical evidence[J]. Journal of Political Economy, 2002, 110(4): 793-824.

[40] Breeden D T. An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities[J]. Journal of Financial Economics, 1979, 7: 265-296.

[41] Buhlmann H. An economic premium principle[J]. ASTIN Bulletin, 1980, 11(1): 52-60.

[42] Buhlmann H. The general economic premium principle[J]. ASTIN Bulletin,1984, 14(1): 13-21.

[43] Burgisser P, Kurth A, Wagner A, et al. Integrating correlations[J]. Risk, 1999, 12(7): 57-60.

[44] Calvet L, Grandmont J M, Lemaire I. Aggregation of Heterogenous Beliefs and Asset Pricing in Complete Financial Markets[M]. Paris: Harvard University and CREST, 2001.

[45] Campbell J K, Lo A W, MacKinlay A C. The Econometrics of Financial Markets[M]. Princeton: Princeton University Press, 1996.

[46] Campbell J Y. Intertemporal asset pricing without consumption data[J]. American Economic Review, 1993, 83: 487-512.

[47] Campbell J Y. Bond and stock returns in a simple exchange model[J]. Quarterly Journal of Economics, 1986, 101: 785-803.

[48] Campbell J Y. Asset Prices, Consumption, and the Business Cycle[M]//Taylor J B, Woodford M. The Handbook of Macroeconomics. Amsterdam: Elsevier, 1999:1231-1303.

[49] Campbell J Y. Asset pricing at the millennium[J]. Journal of Finance, 2000, 55: 1515-1567.

[50] Campbell J Y, Cochrane J H. By force of habit: A consumption-based explanation of aggregate stock market behavior[J]. Journal of Political Economy, 1999, 107: 205-251.

[51] Campbell J K, Viceira L M. Strategic Asset Allocation Portfolio Choice for Long-Term Investors[M]. Oxford: Oxford University Press, 2002.

[52] Cecchetti S G, Lam P, Mark N C. Testing volatility restrictions on intertemporal marginal rates of substitution implied by Euler equations and asset returns[J]. Journal of Finance, 1994, 49: 123-152.

[53] Chamberlain G. Funds factors and diversification in arbitrage pricing models[J]. Econometrica, 1983, 51: 1305-1323.

[54] Chamberlain G, Rothschild M. Arbitrage, factor structure, and mean-variance analysis[J]. Econometrica, 1983, 51: 1281-1304.

[55] Chapman D A. Habit formation and aggregate consumption[J]. Econometrica, 1998, 66: 1223-1230.

[56] Chapman D A. Does intrinsic habit formation actually resolve the equity premium puzzle[J]. Review of Economic Dynamics, 2002, 5: 618-645.

[57] Cheng Bing. Asset Pricing and Equity Premium Puzzle[R]. Working paper. Beijing: CAS, 2004.

[58] Cheng Bing, Tong H. Asset Pricing —— A Structural Theory and Its Applications[M]. London: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007.

[59] Chow G, Kritzman M. Risk Budgets[J]. Journal of Portfolio Management, 2001, 27(2): 56-60.

[60] Christian G. Economics of Time and Risk[M]. Cambridge: MIT Press, 2001.

[61] Claus J, Thomas J. Equity premium as low as three percent? Evidence from analysts' earnings forecasts for domestic and international stock markets[J]. Journal of Finance, 2001, 56(5): 1629-1666.

[62] Clements M P, Hendry D F. Forecasting Non-Stationary Economic Time Series[M]. Cambridge: MIT Press, 2001.

[63] Cochrane J H. Asset Pricing[M]. Princeton: Princeton University Press, 2001.

[64] Cochrane J H. A simple test of consumption insurance[J]. Journal of Political Economy, 1991, 99: 957-976.

[65] Cochrane J H. Where is the market going? Uncertain facts and novel theories[J]. Economic Perspectives, Federal Reserve Bank of Chicago, 1997, 21(6): 3-38.

[66] Cochrane J H, Hansen P. Asset Pricing Explorations for Macroeconomics[M]//Blanchard O J, Fisher S. NBER Macroeconomics Annual. Cambridge:MIT Press, 1992: 115-165.

[67] Cogley T. Idiosyncratic risk and the equity premium: Evidence from the consumer expenditure survey[J]. Journal of Monetary Economics, 2002, 19: 309-334.

[68] Constantinides G M. Habit formation: A resolution of the equity premium puzzle[J]. Journal of Political Economy, 1990, 98: 519-543.

[69] Constantinides G M, Duffie D. Asset pricing with heterogeneous consumers[J]. Journal of Political Economy, 1996, 104: 219-240.

[70] Crane D B, Merton R C. The Global Financial System: A Functional Perspective[M]. Boston, Massachusetts: Harvard Business School Press, 1995.

[71] Daniel K D, Hirshleifer D, Subrahmanyam A. Overconfidence, arbitrage, and equilibrium asset pricing[J]. Journal of Finance, 2001, 56(3): 921-965.

[72] Darkiewicz G, Dhaene J, Goovaerts M. Risk measures and dependencies of risks[J].Brazilian Journal of Probability and statistics, 2005, 19: 155-178.

[73] David R. Risk Coverage Ratio: A Leverage-Independent Method of Pricing based on Distribution of Return[R]. Washington: ASTIN Colloquium, 2001.

[74] Deaton A. Understanding Consumption[M]. Oxford: Oxford University Press, 1992.

[75] Debreu G. The Theory of Value[M]. New Haven, CT and London: Yale University Press, 1959.

[76] Denault M. Coherent allocation of risk capital[J]. Journal of Risk, 2001, 4(1): 1-34.

[77] Diebold F X, Schuermann T, Stroughair J D. Pitfalls and opportunities in the use of extreme value theory in risk management[J].// Refenes A P, Burgess A, Moody J. Decision Technologies for Computational Finance. Amsterdam: Kluwer Academic Publishers. 1998: 3-12.

[78] Dimson E, Marsh P, Staunton M. Triumph of the Optimists: 101 Years of Global Investment Returns[M]. Princeton: Princeton University Press, 2002.

[79] Dowd K. Beyond Value at Risk: the new science of risk management[M]. New York: John Wiley Sons, 1998.

[80] Dowd K. A value at risk approach to risk-return analysis[J]. The Journal of Portfolio Management, 1999, 25: 60-67.

[81] Duesenberry J S. Income, Saving and the Theory of Consumer Behavior[M]. Cambridge: Harvard University Press, 1949.

[82] Duffie D. Dynamic Asset Pricing Theory[M]. 2nd ed. Princeton: Princeton University Press, 1996.

[83] Duffie D, Epstein L G. Asset pricing with stochastic differential utility[J]. The Review of Financial Studies, 1992, 5: 411-436.

[84] Dunn K, Singleton K. Modeling the term structure of interest rates under habit formation and durability of goods[J]. Journal of Financial Economics, 1986, 17: 27-55.

[85] Elton E J, Gruber M J. Modern Portfolio Theory and Investment Analysis[M]. 5th ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995.

[86] Embrechts P, McNeil A, Straumann D. Correlation and dependency in risk management: Properties and pitfalls[R]. Working paper.Zurich: Zurich University, 1999.

[87] Epstein L G, Zin S E. Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption growth and asset returns I: A theoretical framework[J]. Econometrica, 1989, 57: 937-969.

[88] Epstein L G, Zin S E. First order risk aversion and the equity premium puzzle[J].Journal of Monetary Economics, 1990, 26: 387-407.

[89] Epstein L G, Zin S E. Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns II: An empirical analysis[J]. Journal of Political Economy, 1991, 99: 263-286.

[90] Estep T. A new method for valuing common stocks[J]. Financial Analysts Journal, 1985,41: 26-33.

[91] Estep T. Cash flows, asset values, and investment returns[J]. Journal of Portfolio Management, 2003,29(3): 17-26.

[92] Fama E F, French K R. The equity premium[J]. Journal of Finance, 2002, 57: 637-660.

[93] Ferson W E. Expectations of real interest rates and aggregate consumption: Empirical tests[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1983, 18: 477-497.

[94] Ferson W E. Theory and Empirical Testing of Asset Pricing Models[M]//Jarrow R, et al. Handbooks in Operations Research and Management Science. North-Holland: Elsevier Science Publishing Co., 1995: 145-200.

[95] Ferson W E, Constantinides G M. Habit persistence and durability in aggregate consumption: Empirical tests[J]. Journal of Financial Economics, 1991, 29: 199-240.

[96] Fischer T. Risk capital allocation by coherent risk measures based on one-sided moments[J]. Insurance Mathematics & Economics, 2003, 32(1): 135-146.

[97] Fishburn P C. Decision and Value Theory[M]. New York: John Wiley & Sons, 1964

[98] Fisher R, Tippett L H C. Limiting forms of the frequency distribution of largest or smallest member of a sample[J]. Proceedings of the Cambridge philosophical society, 1928, 24: 180-190.

[99] Friedman M. A Theory of the Consumption Function[M]. Princeton: Princeton University Press, 1957.

[100] Friend I, Blume M E. The demand for risky assets[J]. American Economic Review, 1975, 65: 900-922.

[101] Frykman D, Tolleryd J. Corporate Valuation[M]. London: Prentice Hall, 2003.

[102] Gali J. Keeping up with the Joneses: Consumption externalities, portfolio choice, and asset prices[J]. Journal of Money, Credit and Banking, 1994, 26: 1-8.

[103] Garcia R, Perron P. An analysis of the real interest rate under regime shifts[J]. Review of Economics and Statistics, 1996, 78: 111-125.

[104] Gollier C. The Economics of Risk and Time[M]. Cambridge: MIT Press, 2001.

[105] Gollier C. Who Should We Believe? Collective Risk-Taking Decisions with Heterogeneous Beliefs[R]. IDEI Working Paper. Toulouse: University of Toulouse, 2003.

[106] Goovaerts M J, Kaas R, Dhaene J. Economic capital allocation derived from risk measures[J]. North American Actuarial Journal, 2003, 2: 44-59.

[107] Goovaerts M J, Vijlder F, Haezendonck J. Insurance Premiums: Theory and Applications[M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1984.

[108] Gouriéroux C. ARCH Models and Financial Applications[M]. New York: Springer-Verlag Inc , 1997.

[109] Gourieroux C, Laurent J P, Scaillet O. Sensitivity analysis of values at risk[J]. Journal of Empirical Finance, 2000, 7: 225-245.

[110] Greene W H. Econometric Analysis[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1997.

[111] Grinold R C, Ronald N K. Active Portfolio Management[M]. New York: McGraw-Hill, 1999.

[112] Hadar J, Russell W R. Rules for ordering uncertain prospects[J]. American Economic Review, 1969, 59: 25-34.

[113] Hall R E. Stochastic implications of the life cycle-permanent income hypothesis: Theory and evidence[J]. Journal of Political Economy, 1978, 86: 971-987.

[114] Hall R E. Intertemporal substitution in consumption[J]. Journal of Political Economy, 1988, 96: 339-357.

[115] Hall R E. Consumption[M]// Barro R J. Modern Business Cycle Theory. Cambridge: Harvard University Press, 1989: 153-177.

[116] Hamilton J. Time Series Analysis[M]. Princeton: Princeton University Press, 1994.

[117] Hamilton J. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle[J]. Econometrica, 1989, 57: 357-384.

[118] Hanock G, Levy H. Efficiency analysis of choices involving risks[J]. Review of Economic Studies, 1969, 36: 335-346.

[119] Hanoch G, Levy H. Efficient portfolio selection with quadratic and cubic utility[J] The Journal of Business, 1970, 43: 181-189.

[120] Hansen L P, Jagannathan R. Restrictions on intertemporal marginal rates of substitution implied by asset returns[J]. Journal of Political Economy, 1991, 99: 225-262.

[121] Hansen L P, Jagannathan R. Implications of security market data for models of dynamic economies[J]. Journal of Political Economy, 1991, 99: 225-262.

[122] Hansen L P, Jagannathan R. Assessing specification errors in stochastic discount factor models[J]. Journal of Finance, 1997, 52: 557-590.

[123] Hansen L P, Singleton H J. Generalized instrumental variables estimation of nonlinear rational expectations models[J]. Econometrica, 1982, 50: 1269-1286.

[124] Hansen L P, Singleton H J. Stochastic consumption, risk aversion, and the temporal behavior of asset returns[J]. Journal of Political Economy, 1983, 91: 249-265.

[125] Hara C, Kuzmics C. Representative Consumer's Risk Aversion and Efficient Risk-Sharing Rules[R]. Working paper. Evanston: Northwestern University, 2002.

[126] Harris M. Dynamic Economic Analysis[M]. New York: Oxford University Press, 1987.

[127] Hayashi F. Econometrics[M]. Princeton: Princeton University Press, 2000.

[128] He H, Modest D M. Market frictions and consumption-based asset pricing[J]. Journal of Political Economy, 1995, 103: 94-117.

[129] He GuangLiang, Litterman R. The Intuition behind Black-Litterman model Portfolios[R]. Working paper. New York: Goldman Sachs, 1999.

[130] Heaton J, Lucas D J. Evaluating the effects of incomplete markets on risk sharing and asset pricing[J]. Journal of Political Economy, 1996, 104: 443-487.

[131] Heaton J. An empirical investigation of asset pricing with temporally dependent preference specifications[J]. Econometrica, 1995, 63: 681-717.

[132] Huang C F, Litzenberger R H. Foundations for Financial Economics[M]. New York: North-Holland, 1988.

[133] Idzorek T M. A Step-By-Step Guide to the Black-Litterman Model[R]. Working paper. Zephyr Cove: Zephyr Associates, Inc.,2003.

[134] Ingersoll J E. Theory of Financial Decision Making[M]. Totowa: Rowman and Littleland, 1987.

[135] International Monetary Fund. Asset Prices and Business Cycle[J]. World Economic Outlook, 2000, 5: 77-112.

[136] Jenkinson A F. The frequency distribution of the annual maximum (minimum) values of meteorological events[J]. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 1955, 81: 158-172.

[137] Jorion P. Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk[M]. Chicago: Irwin, 1997.

[138] Jorion P, Goetzmann W N. Global stock markets in the twentieth century[J]. Journal of Finance, 1999, 54: 953-980.

[139] Kalbrener M. An axiomatic approach to capital allocation[J]. Mathematical Finance, 2005, 15(3): 425-437.

[140] Kalbrener M, Lotter H, Overbeck L. Sensible and efficient capital allocation for credit portfolios[J]. Risk, 2004, 17(1): 19-24.

[141] Keynes J M. The General Theory of Employment, Interest and Money[M]. London: Macmillan, 1936.

[142] Kocherlakota N R. The equity premium: It is still a puzzle[J]. Journal of Economic Literature, 1996, 34: 42-71.

[143] Kohn M. Financial Institutions and Markets[M]. New York: McGraw-Hill, 1994.

[144] Kreps D M, Porteus E L. Temporal resolution of uncertainty and dynamic choice theory[J]. Econometrica, 1978, 46: 185-200.

[145] Kreps D M, Porteus E L. Dynamic choice theory and dynamic programming[J]. Econometrica, 1979, 36: 91-100.

[146] Kydland F E, Prescott E C. Time to build and aggregate fluctuations[J]. Econometrica, 1982, 50: 1345-1370.

[147] Lawrence M. Marking the cards at ANZ[J]. Risk, 2000,11: 8-12.

[148] Lemus G J. Portfolio Optimization with Quantile-based Risk Measures[D]. Cambridge: Sloan School of Management, MIT, 1999.

[149] LeRoy S F, Werner J. Principles of Financial Economics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[150] Lettau M, Uhlig H. Can habit formation be reconciled with business cycle facts[J]. Review of Economic Dynamics, 2000, 3: 79-99.

[151] Lettau M, Uhlig H. Sharpe ratios and preferences: An analytical approach[J]. Macroeconomic Dynamics. 2002, 6: 242-265.

[152] Lienhard M. Calculation of price equilibria for utility functions of the HARA class[J]. ASTIN Bullettn,1986, 16: 91-97.

[153] Lindskog F, McNeil A. Common Poisson shock models: applications to insurance and credit risk modeling[J]. ASTIN Bulletin, 2003, 33(2): 209-238.

[154] Litterman R. Hot spots^{TM} and hedges[J]. Journal of Portfolio Management, 1996, Special Issue: 52-75.

[155] Litterman R. Modern Investment Management: An Equilibrium Approach[M].Goldman Sachs:Quantitative Resources Group, 2004.

[156] Lucas D J. Asset pricing with undiversifiable income risk and short sales constraints deepening the equity premium puzzle[J]. Journal of Monetary Economics, 1994, 34: 325-341.

[157] Lucas R E Jr. Econometric policy evaluation: A critique[C]//Brunner K, Meltzer A. Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy. Amsterdam: North-Holland, 1976:19-46.

[158] Lucas R E Jr. Asset pricing in an exchange economy[J]. Econometrica, 1978, 46(6): 1429-1445.

[159] Luttmer E. Asset pricing in economies with frictions[J]. Econometrica, 1996, 64: 1439-1467.

[160] Mango D. The Concentration Charge: Reflecting Property Catastrophe Exposure Accumulation in Rates[J]. Non-Refereed Paper/Article Casualty Actuarial Society Forum Casualty Actuarial Society, 1998, 4: 193-207.

[161] Mankiw N G. The equity premium and the concentration of aggregate shocks[J]. Journal of Financial Economics, 1986, 17: 211-219.

[162] Mankiw N G, Zeldes S P. The consumption of stockholders and nonstockholders[J]. Journal of Financial Economics, 1991, 29: 97-112.

[163] Markowitz H M. Portfolio Selection[M]. New York: John Wiley, 1959.

[164] Markowitz H M. Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets[M]. Oxford: Blackwell, 1987.

[165] Masao O, Zhang A. Decreasing Relative Risk Aversion and Tests of Risk Sharing[J]. Econometrica, 2001, 69(2): 515-526.

[166] McNeil A J. Extreme value theory for risk managers[M]. // In asociation with the British Bankers' Association. Internal Modelling and CADII. Landon: Risk Book, 1999: 93-113.

[167] McNeil A J, Frey R. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: An extreme value approach[J]. Journal of Empirical Finance, 2000, 7(3): 271-300.

[168] Mehra R. The Equity Premium in Retrospect[M]//Constantinides G M, Harris M, Stulz R. Forthcoming in the Handbook of the Economics of Finance. Amsterdam: North Holland, 2003: 889-938.

[169] Mehra R, Prescott E C. The equity premium: A puzzle[J]. Journal of Monetary Economics, 1985, 15: 145-161.

[170] Mehra R, Prescott E C. The equity risk premium: A solution[J]. Journal of Monetary Economics, 1988, 22: 133-136.

[171] Merton R C. Continuous Time Finance[M]. Cambridge: Basil Blackwell, 1990.

[172] Merton R C. An intertemporal capital asset pricing model[J]. Econometrica, 1973, 41: 867-887.

[173] Merton R, Perold A. Theory of risk capital in Financial Firms[J]. Journal of Applied Corporate Finance, 1993, 6: 16-32.

[174] Michael M, Quinzii M. Theory of Incomplete Markets[M]. Cambridge: MIT Press, 2002.

[175] Modigliani F, Brumberg R. Utility Analysis and the Consumption Function: An Interpretation of Cross-Section Data[M]//Kurihara K K. Post-Keynesian Economics. New Brunswick: Rutgers University Press, 1954: 388-436.

[176] Mueller A, Stoyan D. Comparison Methods for Stochastic Models and Risks[M]. New York: Wiley, 2002.

[177] Myers S C, Read J A. Capital allocation for insurance companies[J]. Journal of Risk and Insurance, 2001, 68(4): 545-580.

[178] Ogryczak W, Ruszczynski A. From stochastic dominance to mean-risk models: Semideviations as risk measures[J]. European Journal of Operational Research, 1999, 116: 33-50.

[179] Ogryczak W, Ruszczynski A. On stochastic dominance and mean-semideviation models[J]. Mathematical Programming, 2001, 89: 217-232.

[180] Otrok C, Ravikumar B, Whiteman C H. Stochastic Discount Factor Models and the Equity Premium Puzzle[R]. Working Paper.Iowa: University of Iowa, 2001.

[181] Patrik G, Bernegger S, Ruegg M B. The use of risk adjusted capital to support business decision-making[R]. Blatimore: Casualty Actuaries in Reinsurance, 1999.

[182] Pearson N. Risk Budgeting: Portfolio Problem Solving with VaR[M]. New York: John Wiley & Sons, 2002.

[183] Picard D. Testing and estimating change-points in time series[J]. Advances in Applied Probability, 1985, 17: 841-867.

[184] Pickands J I. Statistical inference using extreme value order statistics[J]. Annals of Statististics, 1975, 3: 119-131.

[185] Ploberger W, Kramer W. The local power of the cusum and cusum of squares tests[J]. Econometric Theory, 1990, 6: 335-347.

[186] Porter R B. Semivariance and stochastic dominance: A comparison[J]. The American Economic Review, 1974, 64: 200-204.

[187] Porter R B, Gaumnitz J E. Stochastic dominance versus mean-variance portfolio analysis[J]. The American Economic Review, 1972, 62: 438-446.

[188] Pratt J. Risk aversion in the small and in the Large[J]. Econometric, 1964, 32: 122-136.

[189] Priestley M B. Spectral Analysis and Time Series[M]. London: Academic Press, 1981.

[190] Rahl L. Risk Budgeting: A New Approach to Investing[M]. 1st ed. London: Risk Books, 2000.

[191] Raviv A. The design of an optimal insurance policy[J]. American Economic Review, 1979, 69: 84-96.

[192] Rietz T A. The equity risk premium: A solution[J]. Journal of Monetary Economics, 1988, 22: 117-131.

[193] Rockafellar R T, Uryasev S P, Zabarankin M. Deviation Measures in Risk Analysis and Optimization[R]. Working paper. Gainesville: University of Florida, 2002.

[194] Romer D. Advanced Macroeconomics[M]. New York: The McGraw-Hill Companies, 1996.

[195] Rosenberg J, Engle R. Empirical pricing kernels[J]. Journal of Financial Economics, 2002, 64: 341-372.

[196] Rothschild M, Stiglitz J. Increasing risk I: A definition[J]. Journal of Economic Theory, 1970, 2: 225-243.

[197] Rothschild M, Stiglitz J. Increasing risk II: Its economic consequences[J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3: 66-84.

[198] Roy A D. Safety-first and the holding of assets[J]. Econometrica, 1952, 7: 431-449.

[199] Rubinstein M. An aggregation theorem for security markets[J]. Journal of Financial Economics, 1974, 1(3): 225-244.

[200] Rubinstein M. The strong case for the generalized logarithmic utility model as the premier model of financial markets[J]. Journal of Finance, 1976, 31(2): 551-571.

[201] Samuelson P. Risk and uncertainty: A fallacy of large numbers[J]. Scientia, 1963, 6(57): 1-6.

[202] Samuelson P. General proof that diversification pays[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1967, 2: 1-13.

[203] Satchell S, Scowcroft A. A demystification of the black-litterman model: Managing quantitative and traditional construction[J]. Journal of Asset Management, 2000, 1(2): 138-150.

[204] Sargent T J. Dynamic Macroeconomic Theory[M]. Cambridge: Harvard University Press, 1987.

[205] Scaillet O. Nonparametric estimation and sensitivity analysis of expected Shortfall[J]. Mathematical Finance, 2004, 14: 115-129.

[206] Scherer B. Portfolio Construction and Risk Budgeting[M]. 2nd ed. London: Risk Books, 2004.

[207] Segal U, Spivak A. First order versus second order of risk aversion[J]. Journal of Economic Theory, 1990, 51: 111-125.

[208] Sharpe W F. Capital asset price: A theory of market equilibrium under conditions of risk[J]. Journal of Finance, 1964, 425-442.

[209] Sharpe W F. Budgeting and monitoring pension fund risk[J]. Financial Analysts Journal, 2002, 58(5): 74-86.

[210] Shiller R J. Measuring bubble expectations and investor confidence[J]. Journal of Psychology and Financial Markets, 2000, 1: 49-60.

[211] Shiller R. Consumption, Asset Markets and Macroeconomic Fluctuations[J]. Carnegie Mellon Conference Series on Public Policy, 1982, 17: 203-238.

[212] Siegel J J, Thaler R H. Anomalies: The equity premium puzzle[J]. Journal of Economic Perspectives, 1997, 11: 191-200.

[213] Stokey N L, Lucas R E Jr, Prescott E C. Recursive Methods in Economic Dynamics[M]. Cambridge: Harward University Press, 1989.

[214] Stutzer M. A Bayesian approach to diagnosis of asset pricing models[J]. Journal of Econometrics, 1995, 68: 367-397.

[215] Tasche D. Risk contributions and performance measurement[R]. Working paper. Munich: Munich University of Technology, 1999.

[216] Tasche D. Expected shortfall and beyond[J]. Journal of Banking and Finance, 2002, 26(7): 1519-1533.

[217] Tasche D. Risk contributions in an asymptotic multi-factor framework[R]. Working Paper. Munich: Munich University of Technology, 2005.

[218] Telmer C. Asset pricing puzzles and incomplete markets[J]. Journal of Finance, 1993, 49: 1803-1832.

[219] Tobin J, Dolde W. Wealth, liquidity and consumption[R]. Discussion Papers. New Haven: Cowles Foundation, Yale University, 1971.

[220] Tobin J, Golub S S. Money, Credit and Capital[M]. New York: McGraw-Hill, 1998.

[221] Townsend R M. Risk and insurance in village India[J]. Econometrica, 1984, 62: 539-592.

[222] Urwin R C, Breban S J, Hodgson T M, et al. Risk budgeting in pension investment[J]. British Actuarial Journal, 2001, 7(3): 319-347.

[223] Varian H R. Microeconomic Analysis[M]. New York: W. W. Norton & Company, 1992.

[224] Varian H R. Intermediate Microeconomics: A Modern Approach[M]. 5th ed. New York: W. W. Norton, 1999.

[225] Von Mises R. La distribution de la plus grande de n valeurs[J]//American Mathematical Society. Selected Papers II. Providence: American Mathematical Society, 1954, 2: 271-294.

[226] Wang S. Premium calculation by transforming the layer premium density[J]. ASTIN Bulletin, 1996, 26(1): 71-92.

[227] Waring B, Castille C, Pirone J, et al. Optimizing manager structure and risk budgeting[J]. The Journal of Portfolio Management, 2000, 26(3): 90-104.

[228] Weil P. The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle[J]. Journal of Monetary Economics, 1989, 24: 401-421.

[229] Weil P. Nonexpected utility in macroeconomics[J]. Quarterly Journal of Economics, 1990, 105: 29-42.

[230] Weil P. Equilibrium asset prices with undiversifiable labor income risk[J]. Journal of Economics Dynamics and Control, 1992, 16: 769-790.

[231] Wilson R. The theory of syndicates[J]. Econometrica, 1968, 36(1): 119-132.

[232] Yaari M E. The dual theory of choice under risk[J]. Econometrica, 1987, 55(1): 95-115.



名词索引

G

H

J

K

L

M

Z

